SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXII. — (Anno XCIV)

gennaio - dicembre 1955

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 · Telef. 22-568
1955

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE ED ARTI
IN NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV — VOL. XXII. — (Anno XCIV)

gennaio - dicembre 1955

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO GUGLIELMO GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 · Telef. 22-568
1955

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI

DALL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L' ANNO 1954

letta nell' adunanza plenaria del dì 30 gennaio 1955

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Un nuovo volume del *Rendiconto* — il XXI della serie 4ª — ricco di oltre 30 fogli di stampa, con numerose figure intercalate e 3 tavole fuori testo, e altre due memorie accolte per la inserzione nel volume III della serie 3ª degli Atti, documentano i contributi, che i soci della Classe di Scienze fisiche e matematiche, ed i loro discepoli e collaboratori, hanno portato, nel 1954, alle varie discipline da essi coltivate. Queste pubblicazioni non rappresentano peraltro tutta l' attività dell' Accademia nell' anno testè decorso; chè, come sarà brevemente ricordato in questa mia rapida e disadorna relazione, altre manifestazioni scientifiche o culturali, a cui ha partecipato ufficialmente il nostro Sodalizio o di cui si sono resi benemeriti promotori i nostri colleghi, stanno a testimoniare la vitalità dell' antico e glorioso Consesso quale centro propulsore di cultura del Mezzogiorno di Italia.

Iniziando, come di consueto, la breve rassegna di questa attività accademica del 1954 con i lavori di astronomia e di matematica, ricorderò anzitutto una nota del dott. Riccardo Barbatelli, *Determinazioni di ascensione retta del pianetino Vesta e dei pianeti Urano e Giove,* nella quale vengono esposti i risultati ottenuti nelle osservazioni meridiane dei due grandi pianeti e di un pianetino eseguite dall' autore all' Osservatorio astronomico di Capodimonte, durante l' anno 1953, con le relative riduzioni.

La ininterrotta attività del consocio Nicolò Spampinato — di cui una cospicua parte egli riserba al nostro Rendiconto — ci ha fruttato quattro note, nella prima delle quali vengono studiate *alcune varietà dell'* S_{11} *determinate dall' algebra triduale come sottoalgebra dell' algebra dei numeri doppio-biduali,* mentre nelle altre (che fanno sèguito alla precedente) vengono rispettivamente trattate le questioni relative ad *alcune varietà dell'* S_{23} *complesso determinate dall' algebra dei numeri quadriduali come sottoalgebra dei numeri triplo-biduali,* poi studiata la V_8^7 *dell'* S_{11} *contenente tutte le* $V_6^{2(n+m)}$ *rispondenti alle curve di ordine* n *e classe* m *dell'* S_2,

ed infine esaminata pure la *varietà* V_{22} *dell'* S_{39} *complesso determinata da una* V^{n}_{3} *dell'* S_4 *prolungata nell'* S_4 *cinque-duale.*

Sempre nel campo della geometria, sono da segnalare ancora tre lavori di studiosi estranei all' Accademia. Una nota del dott. Pio Balsimelli, dal titolo *Una trasformazione quadratica biduale e la trasformazione cremoniana nell'* S_5 *ambiente della congruenza* Γ, introduce la trasformazione birazionale dedotta da una trasformazione quadratica biduale con i tre punti fondamentali infinitamente vicini, caratterizza i sistemi lineari di ipersuperficie ad essa legati, e determina, sia nel campo biduale che nel campo complesso, gli enti omologhi degli spazi fondamentali. Un' altra nota, del dott. Angelo Fadini, riguardante *La risoluzione delle equazioni di secondo e terzo grado nell' algebra dei numeri triduali,* applica il teorema fondamentale delle algebre supercomplesse, risolvendo e discutendo le equazioni algebriche di 2° e 3° grado nell' algebra dei numeri triduali, aventi il primo coefficiente non divisore dello zero. Ed una terza nota, del dott. Umberto Sardi, che si riferisce ad *Equazioni di secondo e terzo grado nell' algebra di Study,* risolve dette equazioni, studiando le singolarità delle radici nel caso particolare che le equazioni siano derivabili, e determina le radici ennesime di un numero di Study.

Passando alle ricerche di meccanica razionale, va ricordata una nota, relativa ad *Una generalizzazione di un teorema di Da Silva,* in cui il dott. Francesco Stoppelli tratta questo problema: se su di un solido agisce una sollecitazione a risultante nullo, determinare un rotore tale che, applicato ai vettori della sollecitazione, trasformi questa in un' altra di momento assegnato.

A particolari indagini di Scienza delle costruzioni si riferiscono tre lavori. Il primo, dovuto al prof. Franco Mazzarella, tratta della *Determinazione delle componenti di secondo ordine della deformazione riferite ad un generico sistema di coordinate curvilinee.* Viene esposto, in esso, un interessante procedimento con cui, applicando opportunamente i criteri di trasformazione delle coordinate, si ricavano le espressioni delle componenti di deformazione del primo e secondo ordine per qualsiasi sistema di riferimento di coordinate curvilinee ortogonali. Tali espressioni delle componenti di deformazione, espresse in funzione delle derivate delle componenti di spostamento e dei raggi di curvatura principali delle superfici coordinate, si assegnano al caso particolare di coordinate cilindriche, sferiche e polari, ricavando formule specialmente interessanti per lo studio della stabilità dell' equilibrio elastico delle volte sottili e degli involucri a guscio.

Il secondo, dell' ing. Vincenzo Franciosi, costituisce un notevole *Contributo alla teoria generale delle linee d' influenza,* proponendo un procedimento per costruire le linee d' influenza delle sollecitazioni, utilizzando quelle relative alle caratteristiche iperstatiche. Gli esempi numerici, da lui

riportati, sono sviluppati con riferimento alla trave continua, all'arco incastrato, e alla trave Nielsen.

Il terzo, dell'ing. Tullio RENZULLI, *Sul calcolo delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico*, realizza l'equazione dei quattro momenti per i telai in regime elastoplastico, mostrando come, ove si trascurino le deformazioni elastiche rispetto a quelle plastiche, si ricade nel metodo della rottura localizzata. Si dimostra altresì che le equazioni generali, non lineari, sono suscettibili di una soluzione per successive approssimazioni rapidamente convergente nel caso di forze concentrate.

Nel campo geofisico, speciali ricerche *Sul solarigrafo di Gorczynski n⁰ 327* ha condotte il dott. Pio VITTOZZI, il quale ha reso conto, in una nota, dei procedimenti da seguirsi con detto strumento per la misura della radiazione solare, sia diretta che globale, mettendo in particolare evidenza gli errori da cui sono affetti i valori ottenuti. Per la deduzione delle costanti strumentali viene seguìto un criterio nuovo mediante un apposito dispositivo costruito nell'Istituto di Fisica terrestre di Napoli e che consente una rapida esecuzione delle misure richieste.

Si giunge così al settore degli studi mineralogici, geologici e paleontologici, nel quale sono pure da ricordare lavori molteplici.

Accogliendo la proposta di apposita Commissione, l'Accademia ha deciso di inserire nel volume in corso degli Atti la memoria del prof. Antonio PARASCANDOLA, *Contributo alla mineralogia vulcanica della Campania*, che, già premiata nel concorso al premio biennale del 1951-52, è stata ora rielaborata ed arricchita di nuovi dati, sia per la parte dedicata al Vesuvio, sia per quella riguardante la mineralogia flegrea. Ed ha approvata la stampa, nel medesimo periodico, della memoria del consocio Giotto DAINELLI, che illustra, con i necessari riferimenti bibliografici e con numerose osservazioni critiche, i *Termini stratigrafici locali della regione Etiopica*, riassumendo di ciascuno i caratteri petrografici e paleontologici e interpretando la facies rappresentata : lavoro, del quale è superfluo segnalare la grande utilità per quanti si occupano di geologia africana.

Nel Rendiconto è stata accolta una nota del prof. Antonio LAZZARI sopra *La sedimentazione dei terreni in facies di flysch secondo le antiche osservazioni di R. Zuber*, la quale offre l'interesse di chiarire il significato tettonico e paleogeografico dei termini « flysch » ed « argille scagliose » impropriamente confusi da alcuni autori, dimostrando come i terreni in facies di flysch, largamente distribuiti nel Paleogenico dell'Italia meridionale, si debbano essere sedimentati in zone di arcipelago, mentre le argille scagliose nella loro classica accezione vanno intese quale deposito di mare profondo. Due note del dott. Vincenzo MINIERI riferiscono i risultati di speciali ricerche geochimiche rispettivamente *su alcune bauxiti di Terra d'Otranto* e *sopra una particolare trasformazione del carbonato in fosfato di calcio nella grotta « Zinzulusa » presso Castro* (*Lecce*). Nella

prima si dimostra come, data la giacitura della bauxite in tasche e depressioni dei calcari cretacici interessati da fenomeni carsici nel corso di una lunga fase di continentalità, la deposizione di quei materiali nella penisola salentina non potè aver luogo in facies palustre o lacustre, come si è verificato invece per altre zone pugliesi. Nella seconda si ricerca la causa che ha determinato, nella grotta « Zinzulusa » di Castro, la trasformazione del calcare in fosfato di calcio, mettendola in rapporto con la presenza di un deposito di guano, già esistente in quella cavità ed ora asportato per scopi agricoli.

Una nota paleontologica della dott. Maria MONCHARMONT ZEI esamina poi *I foraminiferi della scogliera a Cladocora caespitosa della Punta delle Pietre Nere presso il lago di Lesina, in provincia di Foggia,* con la conclusione che la ricca microfauna studiata indica, in accordo con la corallofauna e la malacofauna, un habitat caldo e un orizzonte ascrivibile ad una fase piuttosto avanzata del Quaternario, cioè al Tirreniano o, forse, al Versiliano.

Mi corre ora l' obbligo di ricordare che il più anziano ed uno dei più autorevoli fra i nostri colleghi, Giuseppe DE LORENZO, il quale da più di sessanta anni offre alle pubblicazioni accademiche i cospicui frutti della sua dottrina scientifica, letteraria e filosofica, ha continuato a collaborare, nel 1954, con due nuovi lavori. In uno, dal titolo *Himâlaya nell' arte e nella scienza,* egli espone, in una lucida sintesi, quel che la grande catena Himâlayana ha rappresentato, per tre millenni, nella vita spirituale dello Oriente, e specialmente nelle concezioni religiose e nelle manifestazioni artistiche dell' India e del Tibet; e quel che essa ha fornito, negli ultimi due secoli, alle cognizioni scientifiche e all' esercizio alpinistico dell' Occidente. Nell' altro, dal titolo *Tempo e spazio nel pensiero di Leopardi,* continuando ed estendendo le sue osservazioni sulle concezioni cosmiche di LEOPARDI — di cui ci aveva dato un precedente saggio nel 1952 — esamina quel che il LEOPARDI pensasse sui problemi trascendenti, o metafisici, dell' eternità del tempo e dell' infinità dello spazio.

Per dare un quadro meno incompleto dell' attività accademica durante il 1954, occorre rilevare ancora le comunicazioni verbali di alcuni soci. Così, ad esempio, nell' adunanza del gennaio, il collega PICONE accennò ad un interessante problema di analisi matematica, alla cui soluzione, chiesta dal Provveditorato alle Opere Pubbliche di Bologna, collaborano i consoci CACCIOPPOLI e MIRANDA. Sui risultati di tali indagini si ha il progetto di fondare norme razionali per la costruzione degli argini dei grandi fiumi: prova evidente, che le scienze pure, come la matematica, nella loro accezione più elevata, possono essere impiegate per còmpiti immediati di altissimo interesse nazionale. E, nella successiva tornata del febbraio, il socio D' ERASMO riferì sui risultati della nuova livellazione di precisione, eseguita dall' Istituto Geografico Militare nella zona compresa tra Napoli e Pozzuoli, i quali dimostrano come nella classica località del Serapeo c' è stato, dal

1919 al 1953, un ulteriore abbassamento del suolo di mm. 398, pari a mm. 11,7 all' anno.

Invitata, dalla Commissione giudicatrice dei due Premi Urania del Comune di Napoli — destinati per il 1954 alle scienze matematiche ed alle scienze fisiche — a dare una propria designazione dei nomi più meritevoli, l' Accademia indicò quali candidati degnissimi i proff. Carlo MIRANDA ed Eduardo AMALDI, ed ha avuto la soddisfazione di constatare che entrambi hanno ottenuto, nello scorso ottobre, l' ambito premio.

Come negli anni precedenti, il nostro Sodalizio ha partecipato attivamente, con propri delegati o con propri messaggi, a numerosi convegni o congressi o feste celebrative. Ricordo, fra i tanti, il I Convegno Nazionale delle Accademie di Scienze e Lettere, tenuto a Milano e a Venezia nello scorso aprile; la celebrazione del centenario della nascita di Henri POINCARÉ, che ebbe luogo a Parigi nel maggio; le onoranze a Giotto DAINELLI, promosse in Roma dalla Società Geografica Italiana; i Congressi Internazionali di Botanica a Parigi (luglio), dei Matematici ad Amsterdam (settembre), di Etnografia e di Folklore del mare a Napoli (ottobre); le onoranze a Macedonio MELLONI nel centenario della morte, promosse dalla Società italiana di Fisica e dal Rettore dell' Università di Parma; e il Congresso delle Scienze tenuto in India nello scorso mese di dicembre.

Al secondo concorso post-bellico al premio biennale accademico 1953-54 di lire 50.000 su tema di matematica (« *Contributo allo studio dei gruppi o delle algebre dal punto di vista della teoria dei reticoli* »), parteciparono due concorrenti, dei quali l' uno, contrassegnato dal motto « Chi spera, vive », presentò un lavoro manoscritto dal titolo: *Sopra gli elementi modulari in un gruppo* G, *finito,* e l' altro, distinto dal motto « Non c' è scienza senza ritener lo avere inteso », inviò un lavoro sopra *Gli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi di un gruppo.* Associandosi al giudizio della speciale Commissione, l' Accademia ha deciso di attribuire il premio all' autore della memoria contraddistinta dal motto « Chi spera, vive » [1]); ed ha poi dato incarico alla Sezione di Scienze naturali di proporre il tema per il terzo concorso al premio biennale di lire, 50.000 per gli anni 1955-56, che è risultato il seguente: « *Ricerche sulla morfologia comparata dei metameri negli Artropodi* ».

Colmate altre lacune nelle collezioni di atti accademici della Biblioteca con i generosi invii di volumi arretrati da parte di numerosi Enti scientifici italiani e stranieri, ed accresciuti i propri cambi con altre associazioni ed Istituti culturali, l' Accademia ha infine provveduto alle nomine

---

[1]) Aperta — secondo le norme del Regolamento di detto premio — la busta suggellata contenente la scheda col nome dell' autore, nell' adunanza plenaria del 30 gennaio 1955, è risultato autore del lavoro premiato il dott. Giovanni ZACHER del Seminario matematico di Padova.

previste dallo Statuto ed ha rafforzato la compagine dei propri soci. Fu eletto vice-presidente per il 1955 il socio Nicolò SPAMPINATO e fu riconfermato Tesoriere per il triennio 1955-57 il collega Antonio SCHERILLO. Nella sezione delle Scienze Naturali il prof. Giuseppe CATALANO, direttore dello Istituto Botanico di Napoli e già nostro socio corrispondente dal 1950, è stato eletto socio ordinario residente, mentre furono nominati soci corrispondenti il prof. Mario GALGANO, ordinario di Istologia ed Embriologia nel nostro Ateneo, e il prof. Francesco CENNAMO, ordinario di Fisica sperimentale nell' Accademia Aeronautica. Della sezione delle Scienze matematiche sono venuti a far parte, quali soci corrispondenti, il prof. Alfredo FRANCHETTA, titolare di Geometria analitica e descrittiva nella nostra Università, ed il prof. Guido STAMPACCHIA, titolare di Analisi matematica nell' Università di Genova. Il nuovo anno si inizia perciò sotto i migliori auspicî, giacchè è lecito sperare che, completati i propri quadri e rafforzata da nuove energie, l' Accademia potrà sempre meglio attendere al compito con tanta dignità e fervore perseguito ormai da oltre due secoli: il progresso delle scienze fisiche e matematiche e naturali.

Sulla variabilità e instabilità del regime pluviometrico annuale nel Napoletano

Nota del dott. **Cristofaro Mennella**, *presentata dal socio* **C. Colamonico**

(Adunanza del dì 8 gennaio 1955)

Sunto. — Dallo studio del periodo ultrasecolare 1821-1951 delle precipitazioni per Napoli-Capodimonte si desume come degli andamenti annuali medi ritenuti normali nella regione differiscano sensibilmente tra un periodo pluridecennale e l'altro, e come diverse delle conclusioni tratte sino ad oggi su detto regime attraverso l'esame di periodi consimili, e ritenute attendibili e definitive, vadano notevolmente modificate.

La serie pluviometrica dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte (1821-22=1950-51), che ha raggiunto ormai l'estensione di ben 130 anni, rappresenta un prezioso materiale per lo studio razionale della climatologia nell'Italia meridionale per il fatto che, insieme con quelle di Palermo e di Locorotondo, costituisce l'unica e positiva documentazione retrospettiva sull'argomento, consentendo studi rigorosi sulla variabilità dei climi e sugli eventi eccezionali. Su di essa ho già condotte altre indagini [1]) [2]) [3]), miranti alla precisazione di correlazioni esistenti tra fasi successive di ciascuna annata pluviometrica (dal settembre all'agosto successivo) secondo cui ho ripartito l'intero periodo e con i criteri indicati nelle Note citate. In questa mi propongo di discutere un singolare aspetto, di sicura importanza, del problema, e cioè la maggiore o minore stabilità dell'andamento annuale medio nelle diverse epoche, al fine di precisare se effettivamente sussiste un regime tipico piuttosto costante, od anche si riscontrano comportamenti sensibilmente differenti in periodi di durata da precisare.

Il problema in parola si riconnette, evidentemente, con quello più generale delle variazioni dei climi della penisola italiana.

Nell'Italia continentale è abbastanza stabile e costante il regime pluviometrico sub-litoraneo, con due massimi annuali che quasi si equivalgono, nella primavera e nell'autunno, (più precisamente, nel maggio-giugno e

---

[1]) C. Mennella. *La previsione delle disponibilità idriche estive nel Napoletano.* Rendic. Acc. Sc. fis. e Nat., Napoli, 1949.

[2]) C. Mennella. *Sulla scelta della distribuz. udometrica annuale per Napoli-Capodimonte.* Rend. Acc. Sc. fis. e Nat., Napoli, 1950.

[3]) C. Mennella. *Andamento annuale medio e andamento reale della pioggia a Napoli (Capodimonte).* Rendic. Acc. Sc. fis. e Nat., Napoli, 1953.

nell' ottobre-novembre) mentre nell' Italia peninsulare il masssimo autunnale diviene preminente. Nelle regioni più meridionali e in Sicilia questo massimo si porta addirittura nel dicembre, divenendo in tal guisa spiccatamente invernale, e si passa così al regime decisamente marittimo od oceanico.

Per la Campania il COLAMONICO, in una ben nota monografia [1]), affermò che lo regione può considerarsi appartenente ad un tipo unico di piovosità, col massimo nei mesi autunnali e col minimo nell' estate. L' eminente geografo scrive tra l' altro: « Nella sua parte (della Campania) più meridionale si afferma nettamente il cosiddetto regime oceanico o marittimo, col massimo nell' inverno ». E poi: « La nostra regione, col massimo autunno-invernale, rappresenta, dal punto di vista della piovosità, una zona di transizione tra i paesi a regime essenzialmente sub-litoraneo, col massimo nella primavera e nell' autunno, dominante nell' Italia centrale, e i paesi a regime essenzialmente oceanico, dominante nella Basilicata meridionale, nella Calabria e nella Sicilia » (studio del trentennio 1882-1911, condotto su 145 stazioni di cui 33 fondamentali).

Uno dei criteri per giudicare dalla maggiore o minore costanza di detti regimi nelle diverse regioni in parola è quello di vagliare le medie mensili normali per poche Stazioni, relative però a periodi ultrasecolari, in guisa da escludere, per compensazione, eventuali comportamenti diversi dal normale per periodi della durata di alcuni decenni. A tal fine rispondono bene le medie di Milano (187 anni), di Padova (225 anni), di Roma (169 anni), di Napoli (130 anni), di Palermo (145). I periodi indicati terminano tutti con l' annata 1950-51.

Ove in dette medie normali uno dei valori mensili si distacchi più o meno nettamente da quelli dei mesi contigui si può arguire che, effettivamente, al di fuori di possibili variazioni di durata più o meno limitata, si verifica in quel mese una determinata fase dell' annata; se, viceversa, due valori mensili quasi si equivalgono, è lecito arguire che la fase stessa è più o meno oscillante, da un anno all' altro, tra i mesi stessi o li comprende ambedue.

Ecco, intanto, le medie per le città anzidette e relative ai periodi per ciascuna indicati:

[1]) C. COLAMONICO. *La pioggia in Campania.* Momorie geografiche, suppl. Rivista Geografica Italiana. Roma, 1915.

	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
Milano	86,3	117,3	107,3	76,6	61,7	58,3	71,0	86,8	100,9	82,0	70,9	78,8	997,9
Padova	75,2	93,4	81,6	62,3	54,4	48,0	62,4	73,9	85,2	84,7	63,8	63,8	849,0
Roma	64,7	125,2	111,5	97,8	82,4	65,7	71,4	63,5	55,5	37,1	16,4	26,2	817,4
Napoli	74,5	117,6	116,7	113,6	97,5	74,7	71,4	63,5	50,0	34,1	15,0	27,5	856,1
Palermo	46,5	82,8	88,1	95,4	84,7	69,8	68,4	48,9	29,0	15,4	5,8	10,3	645,1

Di queste medie normali ultrasecolari le prime due — Milano e Padova — individuano abbastanza bene il regime sub-litoraneo della Pianura padana, con massimo spiccato nell' ottobre (più netto a Milano) e secondo massimo, primaverile, nel maggio per Milano e nel maggio-giugno per Padova. Le medie di Roma caratterizzano abbastanza bene il regime sub-litoraneo dell' Italia centrale, con massimo nettissimo nell' ottobre e ripresa ancora sensibile (dopo il minimo invernale) nella primavera, ossia nel marzo. Le medie di Napoli sono quelle che dimostrano la scomparsa del massimo assoluto dell' ottobre, con un livellamento pressochè uniforme nel trimestre ottobre-novembre-dicembre. Infatti basterà tener conto della minor durata del novembre (30 giorni) per stabilire che il massimo effettivo compete piuttosto a questo mese e non all' ottobre. Ma l' uniformità dei tre valori dimostra all' evidenza come il massimo stesso oscilli, da un anno all' altro, in detto trimestre (ed il modo particolare di questa oscillazione verrà chiarito più innanzi) e a seconda delle epoche che si considerano, nelle medie rispettive. Si rileva ugualmente la scomparsa del massimo primaverile, ma anche di questo fenomeno del tutto apparente e non reale si dirà più innanzi. Le medie di Palermo si prestano egregiamente per caratterizzare il regime oceanico predominante anche nelle regioni più meridionali della Penisola, con massimo abbastanza netto nel dicembre e scomparsa del massimo primaverile come per Napoli.

Il regime della Campania, certamente distinto sia da quello tipicamente sub-litoraneo di Roma che da quello oceanico di Palermo, potrebbe esser considerato di transizione soltanto se un massimo più o meno spiccato si verificasse nel novembre. Invece ciò non si verifica e, come meglio si vedrà in seguito, ciò che in effetti si riscontra è il fatto che per periodi di vari decenni si ha predominanza assoluta di massimi nell' ottobre, partecipando così all' andamento del regime sub-litoraneo, per altri nel dicembre, conformandosi il regime locale a quello oceanico, e in altri nel novembre. Di più in un buon numero di annate (superanti la metà di quelle considerate) si verificano due massimi distinti, uno nell' ottobre o novembre, l' altro nel dicembre o gennaio, risultando massimo principale più frequentemente il secondo che il primo. Va notato però che i massimi

dell' ottobre (e in parte anche quelli del novembre) sono nettamente più vistosi sia nei singoli valori assoluti che nella media di detti casi, rispetto a quelli del dicembre-gennaio. Però la presenza dei due massimi si verifica soltanto con una frequenza di due a tre rispetto ai casi esaminati, mentre nella determinazione di essi (e del conseguente minimo secondario interposto del novembre-dicembre) concorre abbastanza la minor durata del novembre, rendendo così il fenomeno piuttosto apparente che reale.

Iniziatesi le ricerche sistematiche di pluviometria verso la fine dello 800 e proseguite nei primi decenni del nostro secolo, si inclinò a considerare come valori normali e definitivi, quelli desunti da tali ricerche, che, generalmente, comprendevano periodi di trenta o quarant' anni, e talvolta anche meno. Ebbene l' allungarsi naturale delle serie e la considerazione retrospettiva di quanto si è verificato anche prima dei periodi allora analizzati, permettono oggi di rivedere, almeno in parte, diverse delle conclusioni formulate in base a quei rilievi. E la revisione risulta ancora più importante precisamente per la Campania, presunta zona di transizione tra i due regimi fondamentali.

Onde precisare un primo concetto della instabilità del regime pluviometrico in questa regione, riporto le medie mensili relative a periodi caratteristici studiati successivamente, a loro tempo, da vari Autori, paragonandole poi con i valori ultrasecolari dell' intera serie di 130 anni, da me ricavati. Il periodo anteriore al 1866, meno noto e raramente impiegato, è stato suddiviso in sottoperiodi successivi, varianti appunto dai venti ai trentacinque anni. Si hanno così periodi successivi di 24, 21, 35, 25, 20 anni, ed uno complessivo estendentesi per 130 anni, ossia per un quinquennio in più della somma di tutti i periodi precedenti.

Quest' ultimo quinquennio (1946-1950) risulta, come si vedrà più innanzi, di straordinario interesse per taluni andamenti stagionali eccezionali che vi si sono verificati.

Ed ecco le medie in parola:

Mesi ed anni	1821-44 (24 anni)	1845-65 (21 anni)	1866-900 (35 anni) Alberti	1901-25 (25 anni) Aurino	1926-45 (20 anni) Guerrieri	1821-1951 (130 anni) Mennella	Diff. neg. e positiva dalla media secolare (— +)	Diff. tra valori estremi
Sett	67,8	75.6	69,5	78,8	74,2	74,5	– 6,7; + 4,3	11.0
Ott.	101,9	96,0	125.6	144,8	102,1	117,6	– 21,6; + 27,2	48,8
Nov.	107,1	133,9	112,0	116,8	121.5	116.7	– 9,6; + 17,2	26,8
Dic.	92,9	108.9	120,7	119,2	122,7	113,6	– 20.7; + 9,1	29.8
Gen.	103,9	85,3	97,5	86,4	116,2	97,5	– 12,2; + 18,7	30,9
Feb.	74,8	77,7	63,1	83,5	82,3	74,7	– 11,6; + 8,8	20.4
Mar.	73,3	78,2	73,1	74,2	67.0	71,4	– 4,4; + 6,8	11,2
Apr.	59,2	56.1	75,5	72,2	50,8	63,5	– 12,7; + 12,0	24,7
Mag.	41,6	53,9	53,4	44.5	55.3	50,0	– 8,4; + 5,3	13.7
Giu.	34.5	3[illegible],6	31,6	46,8	30,8	34,1	– 3,3; + 12,7	16,0
Lug.	11,3	16,4	91,1	18,1	11,5	15.0	– 3.7; + 4,1	7,8
Ag.	27.0	39,3	23,8	20,9	29,3	27,5	– 6,6; + 11,8	18.4
Anno	795,3	853,9	865,5	906,6	864,0	856,1	– 60,8; + 50,5	111,3

Il trentennio 1882-1911 esaminato dal Colamonico, e il venticinquennio 1880-1905 considerato dall' Eredia ne « Le precipitazioni in Italia », (comprendenti parte del periodo Aurino) davano rispettivamente:

S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
71,1	129,4	99,3	127,5	85,5	69,8	70,5	77,8	55,1	31,5	14,3	21,1	852,9
73,3	126,2	103 0	116,9	93,1	68,3	67,3	77,8	58.2	34.9	12,6	22,0	853,5

i cui valori non sempre risultano intermedi, come ci si sarebbe potuto aspettare, tra quelli rispettivi dei due periodi suddetti.

Infine il sessantennio 1866-1925, risultante dalla somma del periodo Alberti e del periodo Aurino ed al quale comunemente si risale, con ben limitata attendibilità quanto alla normalità dei valori, nei lavori climatologici di carattere generale, forniva:

S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
73,6	133,6	114,1	120,1	92,9	71,7	73,6	74,2	49,7	38,0	18,7	22,7	882,7

mentre per l' ottantennio 1866-1945 (comprendente il periodo Alberti, il periodo Aurino e il periodo Guerrieri) analizzato dal Mennella (3) si aveva:

S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
73,6	125,7	115,9	120,7	98,7	74,3	71,9	68,4	51,1	36,0	16,9	24,3	878,0

Riferendosi ai periodi consecutivi contenuti nello specchietto precedente e comprendente l' intera serie, pur facendo le dovute riserve per il fatto che i periodi stessi non sono di uguale durata, (cosa di cui si terrà debitamente conto più innanzi) si rileva agevolmente come siano del tutto aleatori i valori relativi a trentenni o quarantenni, sino ad oggi erroneamente ritenuti come normali, sia per la loro inconstanza che per la variabilità.

Da quello specchietto comparativo è desumibile anzitutto una idea generale sull' andamento secolare delle piogge nel Napoletano: si è avuto infatti un andamento di carenza nel ventiquattrennio 1821-844, un andamento pressochè normale nel ventunennio 1845-865, un andamento alquanto superiore al normale nel trentacinquennio 1866-1900, una forte sovraecce-

denza nel venticinquennio 1901-1925, un andamento appena superiore al normale nel ventennio 1926-1945.

Per quanto concerne le oscillazioni delle medie dei singoli mesi pur per periodi ultraventennali si osserva come le variazioni più forti competano, in valore assoluto, all' ottobre, al dicembre e al gennaio; meno sensibili sono le variazioni nel novembre ma ancora molto accentuate nello aprile, nel febbraio e nell' agosto; le variazioni minime competono al luglio, al settembre e al marzo. La media normale annua può differire anche di 50-60 millimetri in più o in meno da una media ultrasecolare. L' entità della variazione può raggiungere i 27 millimetri per l' ottobre e i 20 millimetri per il dicembre e il gennaio; dal febbraio al luglio, al più si raggiungono i 12 millimetri. Ma in percentuali, queste ultime sono altrettanto rilevanti.

Ugualmente interessanti sono i rilievi possibili sugli andamenti stagionali caratterizzanti il regime pluviometrico. Si nota subito c me l' andamento del semestre autunno-inverno (sett. febb.) possa risultare di tre tipi diversi:

1°) con un sol masssimo (principale) come nel 1° e 2° periodo (novembre);

2°) con due massimi (ottobre e dicembre) come nel terzo e quarto periodo;

3°) con un sol massimo, livellato, esteso a due mesi (novembre e dicembre), come nel quinto e che poi si ritrova anche nei valori per la intera serie, nella quale però il livellamento si estende a tre mesi (ott.-nov.-dic.).

Il trentennio studiato dal Colamonico il sessantennio 1866-1325 i cui dati figurano in svariate pubblicazioni ufficiali e anche tecniche, e lo stesso ottantennio 1866-1945 rientrano nel secondo tipo, con due massimi più o meno nettamente spiccati e definiti nell' ottobre e nel dicembre.

Delle differenze così rilevanti possono prestarsi a interpretazioni diverse: i periodi con massimo nel novembre possono considerarsi determinati, effettivamente, da un regime pluviometrico di transizione; quelli con massimo spiccato nell' ottobre e nel dicembre possono attribuirsi alla influenza separata del regime sub-litoraneo che darebbe luogo al massimo incipiente verificatensi nell'ottobre, e del regime oceanico che provocherebbe il secondo massimo, cadente appunto nel dicemhre, come in Sicilia. Le dette influenze potrebbero esplicarsi con la estensione maggiore o minore, da un anno all' altro, su determinate aree, di masse d' aria tipiche e dei correlativi fronti, alla stregua delle vedute odierne sull' argomento. Al riguardo basterà tener conto del fatto che la posizione media del fronte che separa l' aria tropicale da quella temperata calda o intermedia passa per il Golfo della Sirte, poco a sud della Sicilia: ma in taluni anni può portarsi, con spiccato predominio, sulle regioni meridionali dell' Italia e in

altri anni non raggiungerle. Col predominio di aria intermedia nell' autunno, si affermerebbe ancor più verso sud il regime sub-litoraneo dell' Italia centrale che si estenderebbe anche alla Campania, (massimo dell' ottobre) mentre con predominio di aria sub-tropicale si estenderebbe di più verso nord il regime oceanico tipico della Sicilia e della Calabria, che raggiungerebbe anche la Campania.

Quanto al massimo primaverile, altra caratteristica saliente ma apparentemente incerta del regime pluviometrico del Napoletano, si osserva che esso figura soltanto nel periodo Alberti (1866-1900) e nel periodo Colamonico per gran parte coincidente col precedente, mentre è appena accennato nel periodo anteriore 1845 865 per effetto però della minore durata del febbraio rispetto al marzo. Questo massimo, esistente ancora nettamente nella serie di Roma, scomparirebbe dunque pressochè completamente in quella di Napoli. Sta il fatto però che da altra indagine (3) da me condotta risulta che, in effetti, quel massimo esiste in quasi tutte le annate, benchè scompaia dai valori medi di periodi della durata di alcuni decenni e dai dati normali dell' intera Serie, e ciò per la circostanza interessantissima che esso oscilla, nelle diverse annate, tra il marzo, l'aprile e il maggio, con lieve predominanza nei primi di questi mesi. Infatti un minimo secondario, invernale, non manca quasi mai, benchè anch' esso oscillante tra il gennaio, il febbraio e il marzo. Questo minimo fa riscontro al minimo principale del regime sub-litoraneo dell' Italia continentale e secondario dell' Italia centrale, verificantesi appunto nei mesi invernali. Esso non figura nelle medie pluridecennali di Napoli appunto per detta variabilità e instabilità. Tutto ciò dimostra quanto sia nettamente differente il regime annuale reale da quello rivelato dai valori medi pur ritenuti normali.

Come ho accennato innanzi, ciò che potrebbe dar luogo a qualche riserva su quanto rilevo è la circostanza che i periodi avanti considerati non sono di uguale durata (dai 21 ai 35 anni). Ebbene, le deduzioni enunciate sono ugualmente confermate da una ripartizione della Serie in periodi uniformi di dieci, venti, trenta, quarant' anni ed anche sessanta. Questi dati possono dare una visione precisa del ben limitato grado di attendibilità che hanno quei valori pur considerati come normali e sui quali si fondano talvolta delle comparazioni arbitrarie, anche in lavori tecnici e in testi scientifici.

* * *

Può tornare utile, anzitutto, sia per una idea generale sul grado di stabilità dell' elemento considerato, sia per un concetto abbastanza preciso sull'andamento secolare delle piogge a Napoli e nella zona circostante, considerare i medi quinquennali per ogni mese e per gli anni, relativi all'intera serie di 130 anni. Si riportano per tanto questi dati nella seguente Tabella :

Quinquenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Med. annua
1821-22 = 25-26	54,5	110,5	75,7	94,6	106,2	47,5	104,5	56,4	32,5	53,4	17,8	12,2	765,8
1826-27 = 30-31	90,3	144,0	134,8	109,7	140,7	71,3	41,0	54,1	27,4	29,6	9,8	32,2	884,9
1831-32 = 35-36	86,1	59,5	96,8	72,9	54,6	90,7	54,5	63,3	72,7	20,1	14,9	33,0	719,1
1836-37 = 40-41	32,0	86,5	119,5	98,5	118,3	91,7	73,9	76,0	35,6	21,0	5,5	18,3	776,8
1841-42 = 45-46	80,9	103,4	105,1	82,1	108,2	82,0	71,6	54,2	39,2	33,3	3,4	66,1	829,5
1846-47 = 50-51	78,2	121,8	92,7	106,7	76,9	68,2	50,6	78,4	50,6	33,0	22,0	59,0	840,1
1851-52 = 55-56	78,4	79,5	191,7	102,8	71,4	83,0	82,7	45,6	74,7	32,6	16,2	12,5	871,2
1856-57 = 60-61	89,7	106,0	109,3	122,7	103,1	94,0	77,0	76,7	46,0	28,0	28,7	42,2	923,4
1861-62 = 65-66	56,2	81,6	151,4	113,7	79,0	59,7	114,6	13,2	51,8	34,0	3,1	15,7	774,0
1866-67 = 70-71	63,4	149,8	109,0	141,8	131,0	50,5	83,7	43,0	19,8	68,0	47,8	31,5	939,3
1871-72 = 75-76	56,0	149,6	161,7	94,0	71,7	90,8	64,6	84,3	68,0	24,5	27,3	25,2	917,7
1876-77 = 80-81	71,6	97,6	106,0	118,5	89,2	43,5	40,0	83,1	62,8	21,8	5,5	14,6	744,2
1881-82 = 85-86	104,4	144,0	79,7	107,9	98,7	58,0	82,4	89,9	56,3	33,0	12,3	44,8	911,4
1886-87 = 90-91	76,4	114,4	96,8	134,1	97,0	61,2	84,6	72,9	44,0	16,2	10,2	15,1	822,9
1891-92 = 95-96	64,2	102,7	109,5	132,8	105,2	83,0	60,9	93,6	66,3	15,9	15,8	14,2	854,1
1896-97 = 900-01	51,0	121,2	121,5	115,7	85,0	68,8	72,5	64,5	64,8	42,9	14,5	23,3	845,7
1901-02 = 905-06	80,5	164,8	120,9	112,5	75,7	105,6	63,2	64,4	49,6	70,2	14,6	9,0	931,0
1906-07 = 10-11	69,9	152,0	94,5	173,9	75,7	56,4	78,6	87,0	54,3	34,7	26,4	24,8	928,2
1911-12 = 15-16	102,9	117,2	99,6	108,1	127,9	81,2	68,6	61,0	39,0	39,2	11,6	34,6	890,9
1916-17 = 20-21	74,4	185,8	115,3	121,6	96,3	61,5	68,8	89,2	40,8	65,0	13,1	16,7	948,5
1921-22 = 25-26	66,5	104,2	153,8	80,1	68,5	98,2	82,5	58,2	39,6	28,6	25,2	14,8	820,2
1926-27 = 30-31	60,1	94,2	103,3	127,8	116,9	78,8	59,9	48,6	34,2	28,2	1,6	12,6	766,2
1931-32 = 35-36	48,7	84,9	181,9	145,4	91,9	83,2	79,6	64,4	46,8	41,0	11,0	18,4	897,2
1936-37 = 40-41	90,1	112,9	77,4	111,1	122,9	105,9	73,0	60,9	94,5	25,3	17,0	66,5	957,5
1941-42 = 45-46	98,3	116,6	123,6	106,6	127,7	61,1	58,5	26,8	30,2	20,8	2,4	20,8	793,4
1946-47 = 50-51	111,5	153,0	101,7	119,0	94,4	65,7	43,5	42,7	57,6	19,8	13,4	38,4	864,7

Dai suddetti dati quinquennali si può desumere:

1°) Le medie annue per quinquenni (min. ass. 719,1; mass. ass. 957,5), con uno scostamento negativo massimo di 137,0 mm. dalla media ultrasecolare della serie, e con uno scostamento positivo massimo di 101,4 mm., possono differire fortemente da una media normale, anche per oltre 100 millimetri;

2°) per l'andamento secolare si rileva un andamento in antitesi nei primi due quinquenni, un andamento fortemente deficitario (contenente il quinquennio di minimo assoluto della Serie) dal 1831 al 1851; una sovraeccedenza notevole nel decennio successivo 1852-1861; un quinquennio deficitario e poi due fortemente sovraeccedenti, dal 1866 al 1876; altra alternativa nei due quinquenni successivi, médi poco differenti dalla normale nel quindicennio 1886-1901; un ventennio nettamente sovraeccedente dal 1902 al 1921; una notevole carenza nel decennio 1922-1931; una forte sovraeccedenza (comprendente il quinquennio di massimo assoluto della serie) dal 1932 al 1941; quindi un quinquennio sensibilmente deficitario e, infine, un quinquennio del tutto normale nel suo complesso (ma eccezionale per altri aspetti, come si vedrà in altra occasione) che chiude la serie;

3°) i totali dell'ultimo decennio, 1941-1950, nel loro insieme, non hanno nulla di veramente eccezionale, contrariamente a quanto si è voluto affermare da taluni, avendo i suoi valori precisi riscontri coi dati dei quinquenni precedenti;

4°) nessun motivo concreto sussiste per dubitare della attendibilità, messa in discussione da qualcuno, dei dati pluviometrici più remoti, anteriori al 1866, dal momento che essi risultano dello stesso ordine di grandezza di quelli successivi e per il fatto, non meno probativo, che è ben nota la serietà con cui si lavora negli Osservatori astronomici;

5°) per la potenzialità pluviometrica dei singoli mesi si osserva che essa risulta ugualmente rilevante nei mesi autunnali e nel dicembre, mentre diviene più limitata nel gennaio e nel febbraio (media quinquennale massima, per il settembre 111,5 mm., per l'ottobre 185,8, per il novembre 191,7, per il dicembre 173,9, per il gennaio 140,7, per il febbraio 105,9); notevole il fatto che di già per medie quinquennali l'ottobre perde la sua preminenza, che compéte invece al novembre; nell'ambito del semestre estivo, si osserva che la preminenza spetta al marzo, con una media più elevata di 114,6 mm. mentre quella dell'aprile non è che di 93,6; ancora più elevata è quella del maggio, con 94,5, mentre quella del giugno si abbassa a 70,2; le tre medie abbastanza elevate del marzo, dell'aprile e del maggio segnalano l'oscillazione, da un anno all'altro, del massimo primaverile tra detti mesi; infine la media più elevata del luglio scende a 47,8 mentre quella dell'agosto risale a 66,5;

6°) quanto al regime annuale e alla sua instabilità si osserva che nel semestre invernale sett.-febb. si sono verificati due massimi abbastanza

distinti soltanto in 15 dei 26 quinquenni, mentre nei rimanenti 11 il massimo è stato unico ma si è esteso a due mesi consecutivi, e precisamente per 5 volte al novembre-dicembre, per 4 volte all' ottobre-novembre e per 2 volte al dicembre-gennaio; allorchè i due massimi sono stati distinti, si sono verificati per 7 volte nell' ottobre e nel dicembre, per 4 volte nello ottobre e nel gennaio, per 3 volte nel novembre e nel gennaio e per 1 sola volta nel novembre e nel febbraio; il massimo principale dell'annata (sempre per medie quinquennali) si è verificato per 9 quinquenni nello ottobre, per 7 volte nel novembre, per 6 volte nel dicembre e per 4 nel gennaio (dunque in questi ultimi quinquenni il massimo principale si è avuto dopo il dicembre, ossia nel secondo anno civile rientrante nell'annata pluviometrica, il che giustifica in pieno l' adozione di questo tipo di annate negli studi di pluviometria): quanto si è rilevato intorno al semestre invernale conferma la classificazione in tre tipi per il semestre stesso, da me proposta nella Nota (3) e cioè con massimo principale nell' ottobre e secondario nel dicembre o nel gennaio, oppure con massimo secondario nell' ottobre e principale nel dicembre, o, infine, con unico massimo nel novembre-dicembre; (la distribuzione del massimo principale attraverso tutte le annate della serie verrà considerata più innanzi);

riguardo al massimo primaverile si osserva che esso si è verificato per 13 quinquenni nel marzo, per 10 quinquenni nell' aprile e per 3 nel maggio, confermando così, ancora una volta, la sua oscillazione, da un anno all' altro (e perciò anche nei quinquenni) tra detti mesi, ma soprattutto nei primi due, il che porta alla sua scomparsa nei dati normali dell'intera Serie; implicitamente, la sua esistenza così precisata comprova l' effettivo manifestarsi di un minimo invernale;

7°) un quarto massimo dell' annata, dopo quello primaverile, si è verificato per 3 quinquenni nel maggio e per 5 nel giugno (qualche volta nel luglio) confermando così una particolarità che si verifica con discreta frequenza in diverse annate; l' agosto, in 18 dei 26 quinquenni, segna una ripresa più o meno netta rispetto al luglio;

8°) i massimi quinquennali per i diversi mesi risultano inferiori alle medie normali, ultrasecolari, per i mesi stessi, in un sol quinquennio per il settembre, in 3 per l' ottobre, in nessuno per il novembre, in nessuno per il dicembre, in 3 per il gennaio, in 2 per il febbraio, in 1 per il marzo, in 2 per l' aprile, in 2 per il maggio, in 3 per il giugno, in 5 per il luglio, in 3 per l' agosto (si nota una maggiore stabilità nel novembre-dicembre, una incostanza rilevante nell' ottobre, nel gennaio e nel febbraio, nel giugno, nel luglio, nell' agosto).

* * *

L'andamento per decenni conferma a grandi linee quello per quinquenni, riducendo di poco la variabilità e la instabilità. Nel seguente specchietto si riportano i dati medi per detta ripartizione.

Decenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Media decen.
1821-22= 830-31	72.4	127.3	105.3	102.2	123.4	59.4	72.7	55.2	29 9	41.5	13.8	22.2	825.3
1831-32= 840-41	59.0	78.0	108.2	85.7	86.4	91.2	64.2	69.6	54.2	20.5	10.2	25.6	747.8
1841-42= 850-51	78.0	112.6	98.9	94.4	92.5	75.1	61.1	66.3	45.0	35.6	12.7	62.5	834.7
1851-52= 860-61	84.1	92.8	150.5	112.7	87.8	88.5	79.9	61.1	60.4	30.3	22.5	29.4	897.5
1861-62= 870-71	59.8	115.7	130.2	127.8	105.0	53.1	99.1	28.1	35.8	51.0	25.5	23.6	856.7
1871-72= 880-81	63.8	123.6	133.8	106.2	80.4	67.1	62.3	83 7	65.4	23.1	16.4	19.9	845.7
1881-82= 890-91	90.4	129.2	88.3	121.0	97.8	59.6	83.5	81.4	50.2	24.6	11.2	30.0	867.2
1891-92=1900-01	57.6	112.0	115.5	124.2	95.1	75.9	66.7	79.1	65.5	29.4	15.2	18.7	854.9
1901-02=1910-11	75.2	158.4	107.7	143.2	75.7	81.0	70.9	75.7	52.0	52.4	20.5	16.9	929.6
1911-12= 920-21	88.6	151.5	107.4	114.8	112.1	71.4	68.7	75.1	39.9	52.1	12.4	25.7	919.7
1921-22= 930-31	63.3	99.2	128.5	103.9	92.7	88.5	71.2	53.4	36.9	28.4	13.4	13.7	793.1
1931-32= 940-41	69.4	98.9	129.6	128.3	107.4	94.5	76.3	62.6	70.6	33.1	14.0	42.4	927.1
1941-42= 950-51	106.9	134.8	112.7	112.8	111.0	63.4	51.0	34.7	43 9	20.3	7.9	29.6	829.0

Da essi si desume:

1°) le medie decennali, (min. assoluta 747,8; massima assoluta 929,6) con uno scostamento negativo massimo di 108,3 mm. della media ultrasecolare della serie, e con uno scostamento positivo massimo di 73,5 mm. possono differire ancora fortemente da una media normale, sino a più di 100 millimetri;

2°) per l'andamento secolare si rilevano un andamento deficitario complessivo nel primo trentennio 1821-1850, una sovraeccedenza nel decennio 1851-1860, un quarantennio oscillante limitatamente intorno al valore normale (1861-1900), un ventennio nettamente sovraeccedente dal 1901 al 1920, un decennio deficitario dal 1921 al 1930, uno sovraeccedente dal 1931 al 1940 e, infine, uno alquanto deficitario dal 1941 al 1950 (che però difetta fortemente, come si vedrà più innanzi, per il semestre estivo, ciò che ha rappresentato il vero carattere eccezionale di detto decennio);

3°) per la potenzialità pluviometrica dei singoli mesi si osserva che essa, come nei quinquenni, risulta notevole nel settembre, (media decennale massima 106,9 mm.) ugualmente rilevante negli ultimi mesi autunnali e nel dicembre (ott. 158,4, nov. 150,5, dic. 143,2); per il gennaio e il febbraio detta potenzialità si abbassa, rispettivamente, a 123,4 e a 94,5 mm. (l'ottobre riprende la preminenza sul novembre, differentemente di quanto si verifica per i quinquenni);

nell'ambito del semestre estivo dette potenzialità risultano per il marzo 99,1 mm., per l'aprile 83,7, per il maggio 70,6, per il giugno 52,4, per il luglio 25,5 e per l'agosto 62,5, con decrescenza regolare dal marzo al luglio e netta ripresa nell'agosto;

4°) per il regime annuale si osserva che nel semestre invernale

(sett.-febb.) si sono verificati due massimi ben distinti soltanto in 6 dei 13 decenni, mentre nei rimanenti 7 decenni è stato unico estendendosi però, quasi sempre, a due mesi consecutivi, e cioè o all'ottobre-novembre o al novembre-dicembre; allorchè i due massimi sono stati distinti, si sono verificati, con uguale frequenza, o nell'ottobre e nel dicembre o nell'ottobre e gennaio, od anche nell'ottobre e nel febbraio; il massimo principale dell'annata, per medie decennali, si è verificato per 5 volte nell'ottobre, per 7 volte nel novembre e per 1 volta nel dicembre, ossia con una distribuzione ben diversa da quella correlativa per quinquenni; (ciò, evidentemente, per la minore vistosità dei massimi eccezionali del dicembre rispetto a quelli dei mesi precedenti — come ho comprovato nella Nota (3) e per la elevata frequenza di totali deficitari in detto mese;

nell'ambito del semestre estivo, l'andamento complessivo per medie decennali risulta molto più uniforme: infatti il massimo secondario primaverile vi si è verificato per 7 volte nel marzo e per 6 volte nell'aprile;

un secondo massimo in detto semestre (quasi sempre quarto dell'annata) si è verificato soltanto per quattro decenni, nel giugno;

5°) i massimi decennali per i diversi mesi risultano inferiori alle medie normali, ultrasecolari, dei mesi stessi per nessun decennio dal settembre al dicembre, per un sol decennio nel gennaio, per nessuno dal febbraio all'agosto;

6°) per gli andamenti decennali deficitari per i singoli mesi si osserva che la media meno elevata per decennio è per il settembre di 57,6 mm., per l'ottobre 73,0, per il novembre 88,3, per il dicembre 85,7, per il gennaio 75,7, per il febbraio 55,1 per il marzo 51, per l'aprile 28,1, per il maggio 29,9, per il giugno 20,3, per il luglio 7,9 e per l'agosto 15,7; si osserva che nel semestre estivo 1940-41 = 1950-51 si sono verificati ben tre valori minimi per l'intera serie (quelli del marzo, del giugno e del luglio) mentre per gli altri tre mesi si sono avute delle medie tra le più basse: è per tanto che il semestre è risultato fortemente deficitario, laddove quello invernale dello stesso decennio non ha fatto riscontrare nessuna anomalia equiversa, salvo il fatto che la media decennale del settembre è la più elevata di tutti i decenni della serie: dunque ben quattro medie mensili decennali estreme si sono verificate in detto decennio e ciò costituisce, in effetti, un fatto eccezionale, senza riscontro nell'intera serie.

Le medie decennali considerate possono lasciare dei dubbi sull'andamento reale per il fatto che la presenza anche di un sol valore annuale fortemente eccezionale in uno dei mesi può incidere sensibilmente sulla media decennale del mese stesso; così un totale mensile che superi di 200 millimetri la propria media, finisce con l'elevare di ben 20 millimetri la media decennale, dando così a questo dato un valore scarsamente indicatore quanto all'andamento effettivo, corrispondente all'assoluta maggioranza

degli anni del decennio. E il valore del dato diviene ancora più limitato se si consideri che un totale mensile fortemente eccezionale nell' uno e nell' altro verso (di carenza o di sovraeccedenza) in una data Stazione, può essere dovuto anche a circostanze occasionali (consecutività di periodi piovosi o di siccità, predominio costante di taluni venti, correlativi anche all' esposizione della località, condizioni concomitanti di svariati elementi meteorologici favorevoli, ecc.). Per tanto, al fine di eliminare o, comunque, di attenuare sensibilmente una simile influenza e ricondurre i dati a rispecchiare più fedelmente l' andamento reale più frequente, ho operato una riduzione dei valori naturali, mirante ad eliminare le vere e proprie anomalie pluviometriche. Dai totali mensili di ciascun decennio, per ogni mese, ho eliminato il totale più elevato (considerato comunque come eccezionale) uguagliandolo però al secondo meno elevato e facendolo figurare con questo valore nella media decennale di quel mese al fine di conservare il suo apporto di sovraeccedenza comune; e così ho eliminato per ciascun mese e nei singoli decenni, il totale mensile più basso, uguagliandolo però al totale successivo appena più elevato figurante nel decennio per quel mese, onde conservare il suo apporto negativo di carenza comune. Ove i secondi valori a cui sono stati uguagliati quelli estremi risultino poco differenti da questi, vuol dire che non si trattava di vere e proprie eccezioni, dal momento che se ne verificavano già due nello stesso decennio: si aveva da fare, in tali evenienze, con sovraeccedenze o con carenze di entità piuttosto ordinaria. Comunque, ove ciò effettivamente si riscontri, la media decennale così ridotta non differirà sensibilmente da quella naturale già riportata nello specchietto precedente. Dirò medie *normalizzate* quelle così ridotte, e farò osservare che soltanto in linea generale esse risulteranno alquanto più basse di quelle *naturali* per la eliminazione dei totali mensili più elevati; ma per alcune delle medie decennali per i singoli mesi, potrà verificarsi, come talvolta è avvenuto, che la media normalizzata risulti più alta di quella naturale, e ciò si spiega col fatto che il totale mensile più elevato, uguagliato a quello successivo, era meno eccezionale del totale più basso del decennio, uguagliato al successivo meno deficitario. In ogni caso prevarranno le riduzioni, per cui le medie annuali normalizzate per decenni risulteranno sempre meno elevate di quelle naturali.

Riporto nel seguente specchietto dette medie decennali normalizzate:

Decenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Media norm.
1821-22= 830-31	72.7	121.3	95.7	102.3	118.6	59.5	71.0	55.9	27.4	42.5	12.7	21.1	800.7
1831-32= 840-41	57.0	72.8	105.9	86.4	81.8	87.7	63 8	68.9	46.5	17.7	10.0	25.4	723.9
1841-42= 850-51	76.3	103.7	101.1	93.6	91.3	72.6	59.9	66.0	44.2	28.6	8.6	57.2	803.1
1851-52= 860-61	83.8	87.7	143.1	112.7	80.3	88.0	78.6	53.0	61.2	26.0	21.7	24.7	860.8
1861-62= 870-71	56.1	113.8	120.9	120.6	104.8	54.9	95.2	28.2	28.4	43.3	15.2	20.4	801.8
1871-72= 880-81	58.3	124.7	135.8	102.9	76.9	61.7	60.0	80.3	58.8	22.2	10.6	19.0	811.2
1881-82= 890-91	90 2	128.9	88.2	121.4	93.5	59.6	79.6	75.9	47.2	24.2	10.7	29.1	848.5
1891-92=1900-01	59.6	108 7	114.6	120 3	93.6	78.7	66.1	78.7	64.4	24.8	12.1	19.3	840.9
1901-02=1910-11	65.9	150.9	108.0	144.1	76.0	79.6	68.3	71.6	50.4	50.4	20.7	13.0	898.8
1911-12= 920-21	88.1	142.0	103.7	115.5	105.6	70.9	71.3	70.9	37.5	50.4	11.8	24.1	891.8
1921-22= 930-31	64.1	98.7	125.2	99.0	95.2	83.9	69.7	54.1	36.9	23.1	9.9	13.1	772.9
1931-32= 940-41	59.9	91.8	124.5	125.6	108.9	88.5	70.4	62.8	62.9	28.5	12.9	41.1	877.8
1941-42= 950-51	106.3	133.3	118.2	102.9	108.8	60.9	50.8	31 8	44.1	18.3	7.7	30.3	813.4

Media annuale normalizzata, per l'intera serie, 826,6 mm. (con abbassamento di 30 millimetri dalla media normale).

Da queste medie decennali normalizzate si può desumere:

1º) L'andamento secolare resta pressochè uguale a quello delineato coi valori decennali naturali, benchè risultino più limitati gli scostamenti positivi e negativi dalla media generale (+ 72,2 e – 102,7); comunque detti scostamenti decennali ancora possono raggiungere i 100 mm.;

2º) per la potenzialità pluviometrica dei singoli mesi si nota una sensibile attenuazione delle medie più elevate; queste risultano 106,3 mm. per il settembre, 105,9 per l'ottobre, 143,1 per il novembre, 144,1 per il dicembre, 118,6 per il gennaio, 88,5 per il febbraio, 95,2 per il marzo, 80,3 per l'aprile, 64,4 per il maggio, 50,4 per il giugno, 21,7 per il luglio, 57,2 per l'agosto (la riduzione è notevole, rispetto alle medie naturali, per l'ottobre e per il novembre, invertita per il dicembre, ugualmente rilevante per il gennaio e febbraio, sensibile per il marzo e l'aprile, piuttosto rilevante per il maggio, meno sensibile per il giugno e alquanto più rilevante per il luglio e ancor più per l'agosto;

per gli andamenti decennali deficitari relativi ai diversi mesi si osserva che le medie decennali normalizzate differiscono ben poco (al più di qualche millimetro) da quelle naturali corrispondenti, e per tanto non si riportano;

3º) per il regime annuale si osserva che nel semestre invernale (sett.-febb.) si sono verificati due massimi distinti soltanto in quattro dei tredici decenni, un massimo ben limitato ad un mese solo (il novembre) in due decenni, mentre nei rimanenti sette decenni il massimo si è esteso

a due mesi consecutivi, e precisamente per tre decenni all'ottobre-novembre e per quattro al novembre-dicembre;

il massimo principale del semestre, (ed anche dell' annata) si è avuto per 6 volte nell' ottobre, per 4 volte nel novembre e per 3 volte nel dicembre; (si osserva che due massimi molto spiccati nell' ottobre e nel dicembre si sono avuti nel decennio 1901-2=1910-11, ciò che ha determinato il noto andamento, ritenuto caratteristico e costante, nei periodi studiati da vari Autori tra il 1912 e il 1925, comprendenti gli anni dal 1880 al 1912 o 1925);

il massimo primaverile si è verificato per 4 decenni nel marzo, per 5 nell' aprile, per 3 nel maggio e in un decennio manca; per tre decenni si nota un massimo secondario nel giugno;

4°) per l' andamento eccezionale del semestre estivo dell' ultimo decennio (1941-42=1950-51) si ha una conferma di quanto è stato rilevato dall' analisi dei valori naturali (i valori mensili eccezionali si riducono a tre, poichè il totale medio del giugno è risultato meno eccezionale di quello del secondo decennio della serie).

Il regime annuale effettivo, desumibile dalle medie, oltre che da totali anomali, risulta alterato sensibilmente anche dalla diversa durata dei vari mesi, specie per quanto concerne il febbraio, la cui media risulta di un dodicesimo circa meno elevata rispetto ai valori che competerebbero a mesi di durata uniforme; per gli altri mesi l' alterazione si riduce ad un sessantesimo circa, in più o in meno, rispetto alle medie da attribuire a mesi della durata uniforme di trenta giorni e mezzo. Al fine di eliminare anche questa seconda alterazione, di notevole entità sia per quanto riguarda la definizione di un eventuale minimo secondario nel novembre, sia per la precisazione dell' esistenza, anch' essa non del tutto sicura, del massimo primaverile sul quale può influire decisamente la minore durata del febbraio, ho determinato, per tutte le medie mensili decennali, l'abbondanza, ossia il rapporto tra le singole medie e il numero dei giorni del mese a cui si riferiscono. Questo espediente risponde molto bene per comparare le quantità medie diurne della pioggia nei diversi mesi dell' anno, specie se si spingono le approssimazioni, come ho fatto nel caso in esame, ai centesimi di millimetro.

Riporto nel seguente specchietto dette quantità medie diurne, desunte dalle medie normalizzate dei decenni.

Decenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22= 830-31	2.42	3.91	3.19	3.30	3.82	2.11	2.29	1.86	0.88	1.42	0.41	0.68	2 19
1831-32= 840-41	1.90	2.35	3.53	2.79	2.64	3.10	2.06	2.30	1.50	0.59	0.32	5.82	1.98
1841-42= 850-51	2.54	3.35	3.37	3.02	2.95	2.57	1.93	2.20	1.43	0.95	0.28	1.85	2.20
1851-52= 860-61	2.79	2.83	4.77	3.64	2.59	3.11	2.54	1.77	1.97	0.87	0.70	0.30	2.35
1861-62= 870-71	1.87	2.67	4.03	3.88	3 38	1.94	3.07	0.94	0.92	1.44	0.49	0.66	2.19
1871-72= 880-81	1.94	4.02	4 53	3.32	2.48	2.18	1.94	2.68	19.0	0 74	0.34	0.61	2.22
1881-82= 890-91	3.01	4 16	2.94	3.92	3.02	2.11	2.57	2.53	1,52	0.81	0.35	5.94	2.32
1891-92=1900-01	1.99	3.57	3.82	3.88	3.02	2 79	2.13	2.62	2.08	0.83	0.39	0.62	2.33
1901-02=1910 11	2.20	4.87	3.60	4.65	2.45	2.81	2.20	2.39	1.63	1 68	0.67	0.42	2.49
1911-12= 920-21	2.94	4.58	3.46	3.73	3.41	2.47	2.30	2.36	1.21	1.68	0.38	0.78	2.44
1921-22= 930-31	2.14	3.18	4.17	3.19	3.07	2.90	2.25	1.80	1.19	0.77	0.32	0.42	2.11
1931-32= 940-41	2.00	2.96	4,15	4 05	3.51	3.13	2.27	2.09	2.03	0.95	0.42	1.36	2.40
1941-42= 950-51	3.54	4.30	3.94	3.32	3.51	2.16	1.64	1.06	1.42	0.61	0.25	0.98	2 22

Si rileva da queste quantità medie diurne un notevole mutamento rispetto a ciò che era desumibile dalle stesse medie normalizzate. Così il massimo principale dell' aunata, che per quelle medie risultava per 6 decenni nell' ottobre, per 4 volte nel novembre e per 3 volte nel dicembre, figura invece per soli 4 decenni nell' ottobre, per 7 nel novembre e per 2 nel dicembre, invertendo così la posizione di detti massimi; nel semestre invernale, si sono avuti due massimi distinti per 3 decenni nell' ottobre e dicembre, per un decennio nell' ottobre e nel gennaio, per uno nel novembre e febbraio; per 7 decenni i due massimi sono caduti in due mesi consecutivi e precisamente per 4 decenni nel novembre-dicembre e per 3 decenni nell' ottobre-novembre; per un sol decennio si è avuto un massimo ben definito in un mese solo, cioè nel novembre;

per quanto concerne il massimo primaverile si osserva che esso, verificatosi, secondo le medie normalizzate, per 4 volte nel marzo, per 5 nell' aprile e per 3 nel maggio (e in uno mancante) figura nelle quantità medie diurne soltanto per 3 decenni nel marzo, per 6 decenni nell'aprile, per 2 nel maggio mentre scompare in due decenni: comunque questo massimo, nel complesso, figura quasi sempre anche in queste medie delle quantità diurne che eliminano la irregolarità soprattutto del febbraio, e ciò permette di riconoscerne la reale esistenza fisica;

in quattro decenni figura ugualmente il quarto massimo, nel giugno.

Da tutto quanto è stato detto intorno alla distribuzione per decenni si desume come il regime annuale possa cambiare profondamente da un decennio all' altro. Ciò non solo lascia escludere la possibilità di utilizzare periodi di così breve durata per ricavarne induzioni attendibili sui regimi locali della zona del Napoletano, ma dimostra altresì come l' aggiunta di un sol decennio ai dati relativi a trenta quarant' anni possa determinare così profonde variazioni da modificare radicalmente la fisionomia degli andamenti caratteristici dei due semestri dell' annata. Per tanto resta

escluso nella maniera più categorica la possibilità di comparare, nell' ambito della regione campana, delle medie relative a più stazioni, per periodi che differiscano anche per un sol decennio.

La ripartizione della serie per ventenni, uguaglianti la durata di alcuni dei periodi studiati isolatamente da vari Autori come dal GUERRIERI, consente di valutare il grado di attendibilità delle medie che ne derivano. Riporto qui i risultati naturali per detta ripartizione, limitatamente al periodo 1821-22 = 1940-41 : (a scopo comparativo, si riporta, in fondo, il periodo GUERRIERI 1926-1945).

Ventenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	C	L	A	Anno
1821-22= 840-41	65.7	100.1	106.7	93.9	104.9	75.3	68.4	62.4	42.0	31.0	12.0	23.9	786.3
1841-42= 860-61	81.1	102.7	124.7	103.6	89.9	81.8	70.5	63.7	52.7	33.0	17.6	45.0	866.3
1861-62= 880-81	61.8	119.7	132.0	117.0	92.7	61.1	80.7	55.9	50.6	37.0	20.9	21.8	851.2
1881-82=1900-01	74.0	120.6	101.9	122.6	96.5	67.8	75.1	80.3	57.9	27.0	13.2	24 3	861.2
1901-02=1920-21	81.9	155.0	107.6	129.0	93.9	76.2	69.8	75.4	45.9	52.3	16.4	21 3	924.7
1921-22=1940-41	66.4	99.1	129.1	116.1	100 1	91.5	73.8	58.0	53.8	30.8	13.7	28.1	860.5
1926-1945	74.2	121.5	129.1	122.7	116.2	82.3	67.0	50.8	55.3	30.8	11.5	29.3	864.0

Vi si rileva:

1°) media ventennale meno elevata, 786,3 mm., più elevata 924,7 (scostamento negatvio massimo 69,8 mm., positivo 68,6 con notevole livellamento tra i due valori);

2°) andamento secolare come per decenni, con eccezionale carenza nel ventennio iniziale, ed eccezionale sovraeccedenza nel ventennio 1901-1920;

3°) massimo principale dell' annata, per 4 ventenni nel novembre, per uno nell' ottobre, per uno nel dicembre;

4°) nel semestre invernale, due massimi distinti per due ventenni nell' ottobre e nel dicembre, per uno nel novembre e nel gennaio, mentre nei rimanenti tre ventenni si è avuto un massimo solo, nel novembre;

5°) massimo primaverile, per 2 ventenni nell' aprile, per 1 nel marzo, mancante nei rimanenti 3 ventenni;

6°) il confronto dell' ultimo ventennio della ripartizione (1921-1940) col ventennio GUERRIERI (1926-1945) coincidenti per ben quindici anni, segnala sensibili differenze, e cioè nel primo, massimo principale spiccato nel novembre e nel secondo in dicembre che però supera di ben poco la media del mese precedente, costituendo così un unico massimo estendentesi a due mesi consecutivi, differenza elevatissima (di ben 16 millimetri) nelle medie rispettive del gennaio, massimo primaverile mancante nel

primo e figurante in maggio nel secondo: differenze così rilevanti tra due ventenni che non differiscono infine che per un sol quinquennio consentono di rilevare quanto siano difficili le comparazioni e i rilievi nella zona in esame allorchè non si disponga di dati perfettamente simultanei.

Per la determinazione delle medie normalizzate per ventenni ho uguagliato, per ciascun mese dei singoli ventenni, i due totali più elevati al terzo e il meno elevato a quello successivo (pel fatto che sono molto più eccezionali i totali elevati rispetto a quelli deficitari); ciò consentirà di vagliare se una sovraeccedenza o carenza segnalata dalle medie naturali sia dovuta a totali eccezionali sporadici o a reale sovraeccedenza o carenza generale. Ecco dette medie normalizzate:

Ventenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=840-41	64.1	92.5	101.4	91.5	100.8	69.4	64.6	61.7	38.4	30.3	11.3	22.4	748.4
1841-42=860-61	80.7	96.6	115.4	99.6	86.4	81.0	69.3	61.7	52.3	27.6	16.4	40.0	827.0
1861-62=880-81	57.8	118.9	126.7	111.9	90.6	58.0	75 8	52 0	44.9	30.0	13.7	19.6	799.9
1881-82=1900-01	73.7	120.7	95.9	120.3	95.4	65.7	70.7	79.6	56.7	22.8	11.4	23.6	836.5
1901-02=1920-21	81.4	149.6	106.3	125.3	86.0	73.0	69.7	70.6	44.4	51.0	15.3	19.9	892.5
1921-22=940-41	62.2	95.6	125.2	113.7	100.5	86.7	70.0	58.0	46 6	25.5	11.9	23.0	818.9

Il confronto tra queste medie normalizzate e quelle naturali consente di precisare come per talune medie mensili dei singoli ventenni si abbia quasi perfetta uguaglianza tra le naturali e le normalizzate, per altre addirittura una inversione, pel fatto che è stato più eccezionale il totale meno elevato del ventennio anzichè i due totali più elevati, e, infine, per altre ancora una forte differenza, che può raggiungere addirittura i 10 millimetri, la quale denuncia l' esistenza di totali eccezionali sporadici o anomali. Un confronto più dettagliato consentirebbe di individuare questi totali, ma ciò esulerebbe dalla finalità che mi sono proposta in questa Nota. Rilevo soltanto che il massimo principale dell' annata resta per 4 ventenni nel novembre mentre per gli altri due cade nell' ottobre.

La determinazione delle quantità medie diurne per tutti i mesi dei singoli ventenni, operata sulle medie normalizzate al fine di ovviare alla ineguaglianza dei vari mesi, consentirà di vagliare meglio l' andamento annuale per ventenni. Ecco dette quantità medie diurne o abbondanza:

Ventenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22= 840-41	2.17	2.98	3.38	2.95	3.25	2.46	2.08	2.06	1.24	1.01	0.36	0.72	2.05
1841-42= 860-61	2.67	3.12	3.85	3.21	2.79	2.87	2.24	2.06	1.69	0.92	0.53	1.29	2.27
1861-62= 880-81	1.93	3.84	4.22	3.61	2.92	2.05	2.45	1.73	1.45	1.00	0.44	0.63	2.19
1881 82=1900-01	2.46	3.89	3.20	3.88	3.08	2.33	2.28	2.65	1.84	0.76	0.37	0.76	2.29
1901-02=1920-21	2.71	4.83	3.54	4.04	2.77	2.58	2.25	2.35	1.43	1.70	0.49	0.64	2.44
1921-22= 940-41	2.07	3.08	4.17	3.67	3.25	3.07	2.26	1.93	1.50	0.85	0.38	0.74	2.24

Vi si rileva come la posizione del massimo principale dell' annata e quella del massimo primaverile non subiscano spostamenti rispetto a quanto si desumeva delle medie normalizzate; vi risultano tuttavia più spiccati i massimi cadenti nel novembre e meno pronunciati quelli primaverili, per l' incremento subito dai valori del febbraio.

La ripartizione della Serie per trentenni, uguaglianti la durata di diversi dei periodi già studiati, isolatamente, da vari Autori, consente un giudizio comparativo sulla attendibilità delle medie che ne furono desunte e che per tanti anni, con grnnde assegnamento, furono considerate come normali, cosa del resto che si riscontra ancora oggi anche in lavori tecnici. Riporto qui i risultati naturali per detta ripartizione (periodo 1821-1940) aggiungendo, in fondo, a scopo comparativo, il trentennio Colamonico (1882-1911) ed il trentennio 1921=1950 che oggi viene assunto come riferimento per gli andamenti pluviometrici attuali da parte del Servizio Idrografico (si muta per quest' ultimo soltanto l' ordine dei mesi, per adattarlo alla ripartizione delle annate pluviometriche settembre-agosto).

Trentenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22= 850-51	69.8	104.3	101.1	94.1	100.8	75.2	66.0	63 7	43.0	32.6	12.3	36.8	802.7
1851-52= 880-81	69.2	110.7	138.2	115.6	90.9	70.3	80.4	57.6	53 9	34.8	21.5	23.6	866 7
1881-82=1910-11	74.4	133.2	103.8	129.5	89.6	72.2	73 7	78.7	55.9	35.5	15.6	21.9	884.0
1911-12=1940-41	73.8	116 5	121.9	115.7	101.1	84.8	72.1	63.7	49.2	37.9	13.2	27.3	880.2
1882-1911	71.1	129.4	99.3	127.5	85.5	69.8	70.5	77.8	55.1	31.5	14.3	21.1	852.9
1921 1950	75.2	114.4	125.0	113,6	102.0	81.8	67.1	51.5	49.1	30.7	12.6	28.8	851.8

Da queste medie si rileva:

1°) V' ha una netta distinzione tra il primo trentennio, la cui media annuale è fortemente deficitaria, e i successivi tre che risultano concordemente sovraeccedente rispetto alla media normale, ultrasecolare;

2°) Lo scostamento negativo massimo è di 51 millimetri e quello positivo di 30 millimetri ;

3°) Per l'andamento annuale si osserva che esso è ancora così differente da un trentennio all' altro che si potrebbe addirittura ammettere che i dati si riferiscano a diverse stazioni : il primo trentennio, nel proprio semestre invernale fa registrare un massimo piuttosto limitato nell' ottobre-novembre e un secondo massimo nel gennaio, il secondo trentennio ha un sol massimo, spiccatissimo, nel novembre, il terzo trentennio ne ha due, molto accentuati, nell'ottobre e nel dicembre, il quarto ripresenta un sol massimo, nel novembre, ma non fortemente distinto dai medi dei mesi contigui ;

4°) Il periodo Colamonico, per i massimi del semestre invernale, si conforma all' andamento del trentennio 1881-1910, con due massimi ben distinti e piuttosto accentuati nell' ottobre e nel dicembre ; il trentennio 1921-1950 assunto oggi dall' Idrografico come termine di confronto, rivela un unico massimo nel novembre, così come il quarto trentennio della serie, col quale ha un ventennio in comune ;

5°) Il massimo primaverile non figura nel primo trentennio, cade nel marzo nel secondo, nell' aprile nel terzo, manca nel quarto e così pure nel trentennio 1921-1950 ;

6°) La variabilità delle medie mensili da un trententennio all' altro è invero accentuatissima dal momento che vi si rilevano differenze, tra i valori più elevati e quelli meno elevati, di circa 6 millimetri nel settembre, di 29 nell' ottobre, di 37 nel novembre, di 35 nel dicembre, di 12 nel gennaio, di 14 nel febbraio, di 14 nel marzo, di 21 nell' aprile, di 13 nel maggio, di 7 nel giugno, di 9 nel luglio, di 16 nell' agosto ;

7°) Il trentennio di riferimento ora adoperato (1921-1950), nel suo complesso, si presenta come normale ; la sua media annuale non differisce che di un paio di millimetri da quella ultrasecolare dell' intera Serie, e così nessuna anormalità si rileva per le medie mensili dal settembre al febbraio ; ma è dal marzo che si notano sensibili scostamenti negativi rispetto ai valori normali ; così la media del marzo è tra le più basse di tutti i trentenni e di circa 4 millimetri inferiore a quella normale, quella dell' aprile è nettamente la più bassa e risulta di ben 12 millimetri inferiore alla normale, la media del maggio è piuttosto normale, quella del giugno è la più bassa di tutti i trentenni e di circa 4 millimetri inferiore alla normale, la media del luglio è ancora inferiore, di circa 3 millimetri, della normale mentre quella dell' agosto risulta di qualche millimetro superiore alla normale ; complessivamente, la media dell' intero semestre estivo per detto trentennio è di circa 23 millimetri inferiore alla normale e, viceversa, di altrettanto più elevata quella del semestre invernale ; la generale carenza del semestre estivo è dovuta, soprattutto, ai valori fortemente deficitari verificatisi nel decennio 1941-1950 ; comunque queste

ben diverse caratteristiche dei due semestri del trentennio in parola andrebbero tenute presenti negli studi di pluviometrta comparativa eventualmente da compiersi, evitando di giudicare come anormali degli andamenti futuri che potrebbero apparirlo soltanto perchè comparati con valori per se stessi anormali, ma erroneamente ritenuti come quelli normali della Serie e della località in esame.

Comunque, le caratteristiche ancora così differenti dei vari trentenni potranno essere giudicate meglio attraverso i valori normalizzati, eliminanti gli effetti dei totali mensili anomali o sporadici. Per la loro determinazione, ho uguagliato, per i diversi mesi dei singoli trentenni, i tre valori più elevati al quarto e il meno elevato al successivo, per le ragioni dette innanzi (ciò non reca lo stesso effetto delle eliminazioni e riduzioni compiute nei singoli decenni perchè, nell' ambito di un trentennio, i tre valori più elevati di ciascun mese possono cadere anche in un sol decennio, o in due e nessuno nei rimanenti). Ed ecco tali medie normalizzate:

Trentenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1850-51	67.9	97.4	100.6	92.4	95.8	72.7	62.4	60,4	40.4	29.7	10.4	33.0	763.1
1851-52= 880-81	67.7	110.0	128.9	112 9	87.8	67.2	76.7	53.3	50.4	29.0	16.8	20.4	821.1
1881-82=1910-11	71,1	129.4	99.3	127.5	85.5	69.8	70.5	77.8	55.1	31.5	14.3	21.1	852.9
1911-12=1940-41	65.1	105.0	121.1	114.0	100.7	81.3	69.2	61.2	44.4	36.8	11.2	23.5	833.5

Da esse si rileva una sensibile riduzione delle medie soprattutto dell' ottobre (confermando così la forte potenzialità dei suoi totali eccezionali, piuttosto sporadici) e in qualche caso per il novembre e per il gennaio. Per gli altri mesi le riduzioni sono contenute in limiti più modesti. Per quanto concerne gli andamenti annuali si osserva lo spostamento, nel primo trentennio, del massimo principale dall' ottobre al novembre, mentre tutto resta invariato per il massimo primaverile.

E al fine di tener conto anche della diversa durata dei vari mesi, ecco le quantità medie diurne determinate sulle medie normalizzate:

Trentenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1850-61	2.26	3.14	3.35	2.98	3.09	2.57	2.01	2.01	1.30	0 99	0.34	1.06	2.09
1851-52= 880-81	2.26	3.55	4.30	3.64	2.83	2.39	2.47	1.78	1.63	0.97	0.54	0.66	2.25
1881-82=1910-11	2.37	4.17	3.31	4.11	2.76	2.47	2.27	2.59	1.78	1.05	0.46	0.68	2.33
1911-12=1940-41	2.17	3.39	4.04	3.68	3.25	2,88	2.23	2.04	1.43	1.23	0.36	0.76	2.28

Attraverso queste quantità medie diurne si rileva il netto affermarsi dei valori medi del nobembre in ben tre dei quattro trentenni, mentre per il massimo primaverile si rileva il livellamento del marzo e dell' aprile nel primo dei quattro trentenni, (e non figurante nelle medie naturali e in quelle normalizzate) fenomeno in connessione con l' oscillare di quel massimo nei primi mesi del semestre, da un anno all' altro. Infine si rileva la scomparsa di ogni traccia di un massimo secondario nel giugno.

Un quarantennio vien di solito ritenuto come un periodo del tutto idoneo per fornire dati pluviometrici normali per una data Stazione. Ebbene neppure questa generale ammissione risulta comprovata per la zona del Napoletano. Per dimostrarlo, riporto le medie relative a periodi di tale estensione :

Quarantennni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1860-61	73.4	101.4	115.7	98.8	97.4	78.6	69.5	63.1	47.4	32.0	14.8	34-4	826.5
1861-62=1900-01	67.9	120.1	117.0	119.8	94.6	64.4	77.9	68.1	54 2	32.0	17.1	23.1	856.2
1901-02=1940-41	74.1	127.0	118.3	122.6	97.0	83.9	71.8	66.7	49.9	41.5	15.1	24.7	892.6

Vi si rileva :

1°) I tre quarantenni differiscono nettamente l' uno dall' altro per la media annua : deficitario il primo, sovraeccedente il terzo : si ha uno scostamento negativo massimo di 30 millimetri, positivo di 36 mm. ;

2°) L' andamento annuale è nettamente differente tra il primo quarantennio, con massimo nel novembre, ben definito, e gli altri due, con massimi nell' ottobre e nel dicembre (ma soltanto apparenti nel secondo, come si vedrà tra poco) ;

3°) Il massimo primaverile figura soltanto nel secondo quarantennio e precisamente nel marzo ;

4°) La variabilità delle medie mensili da un quarantennio all' altro è ancora rilevantissima ; le differenze tra i valori più elevati e quelli meno elevati sono : sett. 8 mm., ott. 26, nov. 3, dic. 24, genn. 3, feb. 20, mar. 9, apr. 5, mag. 7, giu. 9, lug. 2, ag. 11 (alcune di queste differenze sono nettamente più limitate di quelle per trentenni, altre, invece, più rilevanti, come quella del febbraio : dunque non sempre, la maggiore estensione del periodo, dà compensazione degli scostamenti).

Le differenze ancora così rilevanti tra quarantenni successivi potranno essere vagliate anche al di fuori degli effetti dei valori sporadici : la determinazione delle medie normalizzate e stata compiuta uguagliando, per ciascun mese del quarantennio, i quattro totali più elevati al quinto, e i due meno elevati al terzo che li segue nell' ordine crescente.

Ecco dette medie normalizzate per quarantenni :

Quarantenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22= 860-61	72.4	96.4	106.1	96.5	92.7	75.9	66.5	60.3	43.6	29.1	13.0	31.7	784.2
1861-62=1900-01	67.0	120.1	115.5	116.7	93 9	62.0	73.8	65.3	51.1	26.8	12 0	21.3	823.5
1901-02=1940-41	67.1	116.7	115.5	120.6	95.0	80.5	70 1	63.8	45.9	39.2	13.7	21.6	849.3

Da esse si rileva, anzitutto, una sensibilissima riduzione delle medie del settembre e dell' ottobre per l' ultimo quarantennio, e del novembre per il primo, segnalando così come dei totali eccezionalmente elevati si siano concentrati in essi, specie in detti mesi. Invece per tutti gli altri mesi le riduzioni sono contenute in limiti molto più modesti. Il massimo principale figura, sempre ben definito, in novembre nel primo quarantennio, in ottobre nel secondo, in dicembre nel terzo, contrariamente a quanto si rilevava con le medie dei valori naturali. Il massimo primaverile figura soltanto nel secondo quarantennio, in marzo.

Riporto, anche per i quarantenni, le quantità medie diurne :

Quarantenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1860-61	2.41	3.11	3.54	3.11	2.99	2.69	2.14	2.01	1.41	0.97	0.42	1.02	2.15
1861-62=1900-01	2.23	3.87	3 85	3.76	3.03	2.19	2.38	2.18	1.65	0.89	0.39	0 69	2.23
1901-02=1910-41	2.24	3.76	3 84	3.89	3.06	2.85	2.26	2.13	1.48	1.31	0.44	0.70	2.33

Da queste si rileva un sensibile incremento relativo dei valori medi del novembre rispetto a quelli dei due mesi contigui : infatti esso riesce a prevalere sul dicembre nel secondo quarantennio e sull' ottobre nel terzo, rispetto a ciò che si desumeva dalle medie naturali e da quelle normalizzate.

Ho voluto estendere la comparazione anche tra i due sessantenni della serie. Riporto nel seguente specchietto le medie desunte dai totali mensili naturali, aggiungendo in fondo, per confronto, i dati relativi al sessantennio 1866-1925 calcolati dall' Aurino e che ancora oggi vengono comunemente impiegati.

Sessantenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
821-22=1880-81	69.5	107.5	121.2	104.8	95.9	72.7	73.2	60.7	48.4	33.7	16.9	30.2	834.7
1881-82=1940 41	74.1	124.9	112.9	122.6	96.8	78 5	72.9	71.2	52.5	36.7	14.4	24 6	882.1
1866-1925	73.4	133.6	114.1	120.1	92.9	71.7	73.6	74.2	49.7	38.0	18.7	22.7	882.7

Il confronto tra i due sessantenni della serie fa rilevare un contrasto enorme tra i valori dell' ottobre, del novembre e del dicembre, e ancora notevole nel settembre, nel febbraio, nell' aprile sempre a vantaggio del secondo sessantennio, e con inversioni nel marzo, nel luglio e nell' agosto. La differenza per l' ottobre raggiunge circa 18 millimetri. Differisce profondamente anche l' andamento annuale, poichè nel primo sessantennio si ha il massimo principale, ben definito, nel novembre, mentre nel secondo si ha il massimo principale nell' ottobre e uno secondario nel dicembre. Così nel primo sessantennio si ha un massimo primaverile appena accennato nel marzo, mentre nel secondo si ha soltanto un livellamento nel marzo-aprile.

Ugualmente rilevanti sono le differenze tra il secondo sessantennio della serie (1881-82 = 1940-41) e il sessantennio riassunto dall' AURINO (1866-1925) quantunque essi non differiscano che per un quindicennio. Veramente eccezionale è il totale dell' ottobre nel sessantennio AURINO, superante per ben 9 millimetri quello corrispondente dell' altro sessantennio, mentre una differenza in senso inverso, piuttosto rilevante, si ha nel febbraio. Viceversa le due medie annuali sono quasi coincidenti. Rilevo che l' attenuazione del totale dell' ottobre nel sessantennio 1881-82 = 1940-41 è dovuto ai totali generalmente moderati di quel mese nel quindicennio 1926-1940, mancante nell' altro sessantennio.

I valori medi normalizzati, che riporto nel seguente specchietto, saranno atti a precisare i totali sporadici dell' ottobre nel sessantennio AURINO:

Sessantenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1880-81	68.6	104.4	115.0	101.8	92.1	70.6	70.7	57.4	45.4	29.5	12.9	26.9	795.3
1881-82=1940-41	69.4	118.5	109.9	120.7	95.1	76.1	70.4	67.1	49.9	34.6	13.1	22.5	847.3

Si rileva come risultino attenuati più sensibilmente i totali del settembre e dell' ottobre nel secondo sessantennio e quelli del novembre nel primo (la normalizzazione è stata ottenuta in questo caso uguagliando, per i singoli mesi, i sei totali più elevati al settimo e i tre meno elevati al quarto). Comunque, anche con i totali normalizzati, restano differenze sostanziali negli andamenti dei due sessantenni, specie per quanto riguarda i valori medi dell' ottobre, del dicembre e dell' aprile, a tutto vantaggio del secondo sessantennio.

Ed ecco le quantità medie diurne ottenute dalle medie normalizzate dei due sessantenni:

Sessantenni	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22= 880-81	2.29	3.37	3.83	3.28	2.97	2.50	2.28	1.91	1.46	0.98	0.42	0.87	2.18
1881-82=1940-41	2.31	3.82	3.67	3.89	3.07	2.66	2.27	2.24	1.61	1.15	0.42	0.73	2.32

Da queste, oltre il potenziamento del novembre rispetto ai due mesi contigui, si rileva la scomparsa, in ambedue i sessantenni, del massimo primaverile ad opera dell' incremento sensibile subito dalle medie del febbraio; ma, in effetti, come è stato accennato altrove, detta scomparsa è soltanto apparente.

Finalmente nel segaente specchietto riporto le medie mensili per il centoventennio 1821-22=1940-41, somma dei due sessantenni precedenti, e del centotrentennio 1821-22=1950-51 costituente l' intera serie, e ciò per consentire il rilievo delle modificazioni ai dati normali che può provocare l' aggiunta di un sol decennio:

Periodo	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1940-41	71.8	116.2	117.0	113.7	96.3	75.6	73.1	66.0	50.5	35.2	15.7	27.4	858.5
1821-22=1950-51	74.5	117.6	116.7	113 6	97.5	74.7	71.4	63.5	50.0	34,1	15.0	27.5	856.1

Da queste si rileva come le differenze più sensibili si riscontrino nel settembre (mm. 2,7) a vantaggio dell' intera serie, per l' elevato valore riscontratosi in detto mese nel decennio 1941-42=1950-51 (il più elevato valore medio del settembre per tutti i decenni) e nell' aprile (mm. 2,5) a vantaggio del centoventennio per il valore deficitario dell' aprile stesso nell' ultimo decennio della serie. Notevole altresì lo scambio tra i valori medi dell' ottobre e del novembre nei due periodi pur coincidenti per ben centoventi anni.

Per la determinazione dei valori normalizzati sono stati uguagliati, per ciascun mese, nel centoventennio i dodici totali più elevati al tredicesimo e i sei meno elevati al settimo, mentre nei centotrenta anni dell' intera serie i tredici totali più elevati al quattordicesimo e gli ultimi sei, meno elevati, al settimo.

Ed ecco dette medie normalizzate:

Periodo	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1940-41	69.6	111.8	112 0	110.9	94.2	73.2	70.1	62.3	47.4	32 3	13.0	24.3	820.6
1821-22=1950-51	72.8	113.1	111.9	110.4	95.0	69.9	68 6	60.0	46.9	31.1	12.6	24.4	816.7

Vi si rileva che le attenuazioni maggiori delle medie rispetto a quelle naturali si riscontrano nell' ottobre e nel novembre (circa 5 mm.); riduzioni più limitate si osservano nel dicembre e nel gennaio (da 2 a 3 mm.), una sensibilmente elevata nel febbraio (circa 5 mm.) e nell' aprile, tutte più limitate negli altri mesi. Notevole altresì il fatto del quasi perfetto livellamento tra le medie dei tre mesi consecutivi ottobre, novembre e dicembre (appena inferiore quest' ultimo) che vengono a costituire così il massimo principale, anzi la fase preminente dell' annata.

Riguardo a quest' ultima si può trarre la seguente conclusione di ordine generale :

1) Allorchè l' andamento pluviometrico annuale è piuttosto ordinario, si ha il massimo principale nel novembre ;

2) Allorchè detto andamento dimostra tendenza alla sovraeccedenza, il massimo principale si ha, invece, con totali piuttosto vistosi, nell' ottobre mentre il dicembre costituisce un secondo massimo che, con elevata frequenza, diviene massimo principale ;

3) Allorchè l' andamento annuale dimostra tendenza alla carenza, il massimo principale cade o nel novembre o nel dicembre.

Ed ecco, infine, anche per i due periodi ultrasecolari, le qunantità medie diurne ottenute sempre dalle medie normalizzate :

Periodi	S	O	N	D	G	F	M	A	M	G	L	A	Anno
1821-22=1940-41	2.33	3.59	3.73	3.58	3.04	2.59	2.26	2.08	1.53	1.08	0.42	0.78	2.35
1821-22=1950-51	2.43	3.65	3.73	3.56	3.06	2.76	2.21	2.00	1.51	1.04	0.41	0.79	2.34

Da queste quantità si desume come, in effetti, la pioggia sia più abbondante nel novembre che nei due mesi contigui, e ciò almeno nella assoluta maggioranza delle annate e con la eliminazione parziale dei totali sporadici, molto vistosi specie nell' ottobre, e che sono stati riportati ad una sovraeccedenza contenuta in limiti normali. L' aver teuuto conto della ineguaglianza dei vari mesi ha consentito di spostare, nell' intera serie, il massimo principale al novembre, benchè, agli effetti pratici, bisogna tener conto di un sostanziale livellamento delle medie del trimestre ottobre-novembre-dicembre.

Per una considerazione adeguata della variabilità e della instabilità del regime pluviometrico annuale si richiede lo studio delle stesse caratteristiche per i singoli mesi, per le stagioni, per i semestri costituenti l' annata pluviometrica.

I totali della pioggia per ciascun mese costituiscono un insieme di elementi che si distinguono per una fortissima dispersione e per una eccezionale asimmetria rispetto alla media aritmetica che ne deriva ; queste due caratteristiche mi suggeriscono una speciale classificazione di quei totali, sia agli effetti teorici che pratici. Con una dispersione elevatissima, con larga discontinuità in molte zone del campo di variabilità, con una asimmetria che fa differire gli scostamenti positivi e negativi nel rapporto di uno a tre ed anche di uno a quattro per i mesi autunnali, e di uno

a sei per taluni mesi estivi, non ha più senso il parlare di una media aritmetica di simili valori.

Cito ad esempio l' ottobre. La media del centotrentennio (che pure, erroneamente, continua a denominarsi come normale) è di 117,6 mm.; 69 totali risultano inferiori ad essa e 61 superiori; ma i 69 totali inferiori sono distribuiti in un campo di 110 mm. di amplitudine, mentre i 61 più elevati sono dispersi in un campo di ben 274 mm. di amplitudine. Il totale più elevato (massimo assoluto) risulta di 391 mm., ma esso si distacca di ben 90 millimetri da quello che lo segue nell' ordine denotando così, chiaramente, il suo carattere sporadico, dovuto a circostanze occasionali o, comunque, del tutto eccezionali. Per pervenire, nella distribuzione, di detti totali, ad una sufficiente continuità, occorre portarsi all' altezza dei 210 millimetri circa: ben 13 totali più elevati restano al di sopra di questo limite ma essi, appunto per la loro radezza, debbono essere considerati come al di fuori della norma della comune piovosità eccezionale. Per il loro numero, in media, corrispondono ad uno per decennio. Questi totali potrebbero esser dovuti a quei fenomeni che dànno luogo ai comuni nubifragi, durante i quali, nel corso di un sol giorno, possono cadere 200-300 millimetri di pioggia (e talvolta, come nel nubifragio del Salernitano dell' ottobre 1954, anche più). Eliminando questi totali, che dirò *sovrabbondanti,* dall' insieme, i rimanenti formano un complesso omogeneo, limitatamente disperso, perfettamente simmetrico rispetto ad una nuova media da essi desunta e che corrisponde a quella dei totali che non rivelino vere e proprie anomalie e che si possono valutare a nove su dieci dei casi comuni. Questa nuova media, che dirò *ricorrente,* perchè relativa ad andamenti ordinari e ad altissima frequenza (9 a 10 dei casi comuni, come ho detto innanzi), acquista un significato anche fisico oltre che numerico, poichè molto più aderente alla realtà e al comportamento effettivo del fenomeno, almeno in una assoluta maggioranza dei casi.

Rispetto alla media ricorrente, si hanno scostamenti uguali per i totali asciutti od eccezionalmente piovosi, ma nell' ambito e nella misura della normalità.

Per tutti i mesi si riscontrano, nell' intera serie, totali sovrabbondanti e quasi per tutti qualche totale sporadico, del tutto isolato ed evidentemente dovuto a circostanze eccezionali. Il numero dei casi sovrabbondanti andrebbe precisato per ciascuna delle serie mensili, ma per una ricerca di carattere generale basterà attenersi alla media di uno per decennio (13 in ciascuna serie mensile) che risponde abbastanza bene alla situazione effettiva. Così la media ricorrente viene determinata per i rimanenti 117 totali di ciascuna serie mensile. In effetti, sono stati considerati sovrabbondanti i 13 totali mensili più elevati di ciascuna serie, per cui vi saranno decenni che mancano di un tale totale e decenni che ne annoverano due (od anche

più), situazione anche questa corrispondente in pieno alla realtà delle manifestazioni in esame. Comunque va tenuto presente che uno solo di quei totali in un decennio, è in grado di alterare anche di 10-20 millimetri la media mensile ed annuale corrispondente, con evidente artificiosità.

Per tanto per ciascun mese ho determinato i limiti dei totali sovrabbondanti (e l' entità del totale sporadico ove esista) e la loro media, i limiti dei casi più frequenti, la media ricorrente ad essi relativa, i limiti dei totali piovosi ed eccezionalmente piovosi rientranti nell' ambito della normalità e la loro media, i limiti dei totali asciutti ed eccezionalmente asciutti, simmetrici coi precedenti e la loro media. Implicitamente, restano determinati, per ciascuna serie mensile, i valori estremi, ossia il massimo ed il minimo assoluti.

Per il numero dei giorni piovosi, altro elemento di grande interesse ai fini della climatologia, mi limito a riportare, per ciascun mese, la media, il numero più elevato e quello meno elevato avutosi nel centotrentennio in esame.

Nel seguente specchietto vengono raccolti tutti i dati di cui si è fatto cenno.

	Sett.	Ott.	Nov.	Dic.	Genn.	Febbr.
Media normale	74.5	117.6	116.7	113.6	97.5	74.7
Mass. assoluto	216	391	352	281	276	197
tot. sporadico	—	391	352	281	276	—
tot. sovrabbond.	216 M=182 154	391 M=257 209	352 M=243 192	281 M=230 200	276 M=210 182	197 M=166 142
piov. ed eccez. piov.	154 M=145 135	209 M=186 163	192 M=172 152	200 M=187 175	182 M=165 144	142 M=134 125
tot. ordinari	135 19	163 47	152 51	175 25	144 38	125 17
tot. asc. ed ecc. asc.	19 M=11 0.0	47 M=29 7	51 M=34 10	25 M=14 0.4	38 M=25 0.1	17 M=8 1.2
Minimo assol.	0.0	7.3	10.0	0.4	0.1	1.2
Media ricorrente	62.5	102.1	102.6	100.7	84.9	64.5
g. piovosi Max	17	22	27	26	25	26
g. piovosi Med.	6.7	10.7	12.6	12.5	11.4	10.4
g. piovosi Min.	0.0	2	5	1	1	2

	Mar.	Apr.	Mag.	Giu.	Lug.	Ag.
Media normale	71.4	63.5	50.0	34.1	15.0	27.5
Mass assoluto	210	169	233	170	147	174
tot. sporadico	—	—	233	170	147	174
tot. sovrabbond.	210	169	233	170	147	174
	M=153	M=144	M=136	M=109	M=69	M=88
	126	108	106	80	37	61
piov. od eccez. piov.	126	108	106	80	37	61
	M=115	M=99	M=97	M=75	M=34	M=58
	104	93	90	72	31	57
tot. ordinari	104	93	90	72	31	57
	22	14	14	3	1	2
tot. asc. od ecc. asc.	22	14	14	3	1	2
	M=13	M=7.4	M=6	M=2	M=0	M=0.4
	3	0.5	0 0	0.0	0	0.0
Minimo assoluto	2.9	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0
Media ricorrente	62.3	54.5	40 4	25.7	9.8	12.3
g. piovosi Max	22	23	21	14	14	13
Med.	10.8	9.9	8.2	5 2	2.3	3.7
Min.	2	0	0	0	0	0

Per ciascuna serie mensile sono stati considerati, con criterio uniforme, 13 totali sovrabbondanti, 13 piovosi od eccezionalmente piovosi, 13 asciutti od eccezionalmente asciutti; i casi ordinari risultano in numero di 91. Ciò equivale a considerare, in ciascun decennio, in media, un totale sovrabbondante per ciascun mese, un totale piovoso od eccezionalmente piovoso entro i limiti della normalità, un totale asciutto od eccezionalmente asciutto; sette anni, in media, in ciascun decennio, risulterebbero ordinari. Va notato tuttavia che, in ciascuna annata, in media, si riscontrano due o tre mesi a totale molto elevato e di cui qualcuno addirittura eccezionale, e nove o dieci mesi con totali generalmente deficitari o comunque al disotto delle rispettive medie normali; questi ultimi risultano molto più prossimi alla media ricorrente.

Per il numero dei giorni piovosi estremi osservo che, per diversi mesi, essi sono sporadici: i valori eccezionali contenuti nell'ambito della normalità sono molti più limitati. Infine rilevo che per l'annata e per i semestri si sono avuti i seguenti valori medi ed estremi:

Anno: media giorni piovosi	104,4;	Max 147;	min. 82;
Sem. invernale: » »	64,3;	Max 103;	min. 41;
Sem. estivo: » »	40,1;	Max 66;	min. 15.

Le medie dei giorni piovosi per il centotrentennio 1821-1951 sono risultate meno elevate di quelle relative all'ottantennio 1866-1945 da me studiato nella Nota (3).

Di notevole interesse ai fini delle ricerche sulla incostanza del regime pluviometrico annuale nella zona in esame è lo studio della variabilità dei totali stagionali da un periodo decennale all'altro, sia per quanto concerne il valore assoluto di quei totali — la cui entità, nei casi eccezionali, ha potuto dar luogo a svariati inconvenienti di carenza o di sovraeccedenza — sia per ciò che riguarda l'apporto percentuale di ciascuna stagione al totale dell'annata. Naturalmente, in ciascun decennio, un andamento stagionale eccezionale rivela l'addensarsi, nel decennio stesso, di totali consimili e nello stesso verso, rivelatore di un andamento secolare correlativo; ciò non toglie che nel decennio possa esistere qualche caso in opposizione con l'andamento predominante.

Nel seguente specchietto riporto le medie stagionali per decenni, quelle per semestri, e le rispettive percentuali rispetto al totale medio dell'annata; infine, i dati dell'intera serie.

Decenni	A	I	P	E	Sem. inv.	Sem. est.	Anno	A %	I %	P %	E %	Sem. inv. %	Sem. est. %
1821-22 = 830-31	305.0	285.0	157.8	77.5	590.0	235.3	825.3	37.0	34 5	19.1	9.4	71.5	28.5
1831-32 = 840-41	240.2	263.3	188.0	56.3	503.5	244.3	747.8	32.1	35.2	25.2	7.5	67.3	32.7
1841-42 = 850-51	289,5	262.0	172 4	110.8	551.5	283.2	834.7	34.7	31.4	20.6	13.3	66.1	33.9
1651-52 = 860-61	327.4	288.5	201.4	80.2	615.9	281.6	897.5	36.5	32.2	22.4	8.9	68.7	31.3
1861-62 = 870-71	305.7	287 9	163.0	100.1	593.6	263.1	856.7	35.7	33.6	19.0	11,7	69.3	30.7
1871-72 = 880-81	321.2	253.7	211.4	59.4	574.9	270.8	845.7	38.0	30.0	25.0	7.0	68.0	32.0
1881-82 = 890-91	307.9	278.4	215.1	65.8	586 3	280.9	867 2	35.5	32.1	24,8	7.6	67.6	32.4
1891-92 = 900-01	285.1	295.2	211.3	63.3	580.3	274.6	854.9	33.4	34.5	24.7	7.4	67.9	32.1
1901-02 = 910-11	341.3	299,9	198.5	89.8	641.2	288.4	929.6	36.7	32.3	21.4	9.6	69.0	31.0
1911-12 = 920 21	347 5	298.3	183.7	90.2	645.8	273.9	919.7	37.8	32.4	20.0	9.8	70.2	29.8
1921-22 = 930-31	291.0	285.1	161.5	55.5	576.1	217.0	793.1	36.7	35.9	20.4	7.0	72.6	27,4
1931-32 = 940-41	297.9	330.2	209.5	89.5	628.1	299.0	927.1	32 1	35.6	22.6	9.7	67.7	32.3
1941-42 = 950-51	354.4	287.2	129.6	57.8	641.6	187.4	829.0	42.6	34.7	15.7	7.0	77.4	22.6
1821-22 = 950-51	308.8	285.8	184.9	76.6	594.6	261.5	856.1	36.1	33.4	21.6	8.9	69.4	30.6

Vi si rilevano le seguenti amplitudini:

Autunno: Media più elev. 354,4 ; meno elev. 240,2 ; % Max 42,6 ; min. 32,1
Inverno: » » 330,2 ; » » 253,7 ; » 35,9 ; » 30,0
Primavera: » » 215,1 ; » » 129,6 ; » 25,2 ; » 15,7
Estate: » » 110,8 ; » » 55,5 ; » 13,3 ; » 7,0
Semestre inv. » 645,8 ; » » 503,5 ; » 77,4 ; » 66,1
Semestre est. » 299,0 ; » » 187,4 ; » 33,9 ; » 22,6

La comparazione dei dati relativi all'ultimo decennio della serie

(1941-42=1950-1951) con quelli corrispondenti degli altri decenni vale a mettere in evidenza le sue caratteristiche invero eccezionali. Vi si sono verificati l'autunno medio più elevato di tutti i decenni sia in quantità che in percentuale annua, e la primavera più deficitaria, nettamente inferiore a tutte le altre sia per quantità che per percentuale; la sua estate è risultata tra le meno elevate, ma non estrema perchè questa compete al decennio 1921-22=1930-31; il suo semestre invernale risulta secondo tra i più elevati della serie, mentre quello estivo è nettamente il più deficitario, con totale di 30 mm. meno elevato di quello che lo segue nell'ordine; in percentuali, i due semestri di detto decennio attingono, rispettivamente, i valori più elevati e meno elevati dell'intera Serie. Tutto ciò conferisce a quel decennio una fisionomia sostanzialmente anomala, sino ad oggi non messa in rilievo da altri studiosi.

Al fine di rilevare le caratteristiche stagionali del trentennio 1921-1950 assunto oggi dall'Idrografico come termine di confronto, riporto nel seguente specchietto i dati relativi a tutti i trentenni della serie:

Trentenni	A	I	P	E	Sem. inv.	Sem. est.	Anno	A %	I %	P %	E %	Sem. inv. %	Sem. est. %
1821-22 = 1850-51	278.2	270.1	172.7	81.7	548 3	254.4	802.7	34.7	33.6	21.5	10.2	68.3	31.7
1851-52 = 1880-81	318 1	276.8	191.9	79.9	594.9	271.8	864.7	36.7	31.9	22.2	9.2	68.6	31.4
1881 82 = 1910-11	311 4	291.3	208.3	73.0	602.7	281.3	884.0	35.2	32.9	23.6	8.3	68.1	31,9
1911-12 = 1940-41	312.2	304.6	185.0	78.4	616.8	263.4	880.2	35.5	34.6	21.0	8.9	70.1	29.9
1921 = 1950	314.6	297.4	167.7	72 1	612.0	239.8	851.8	36.9	34.9	19.6	8.4	71.9	28.1

Vi si rilevano, per il trentennio 1921-1950, la spiccatissima deficienza della primavera, un totale medio ugualmente basso per l'estate e perciò una media complessiva nettameate deficitaria per l'intero semestre estivo; viceversa quello invernale, superiore alla media generale dell'intera serie, rivela una media tra le più alte dei trentenni. In percentuali, le anomalie del trentennio in parola sono ancora più rilevanti: l'autunno detiene la percentuale più elevata di quella dei vari trentenni e così pure l'inverno; il semestre invernale ugualmente, com'era naturale, si avvantaggia su tutti gli altri; il percento della primavera, viceversa, è il più basso di quello spettante a detta stagione negli altri trentenni, mentre quello dell'estate è pressochè uguale a quello più basso delle altre estati della serie; il semestre estivo è nettamente inferiore, in percentuale, a quello degli altri trentenni. Nessun trentennio della serie assomma delle medie e dei percenti così eccezionali. Di tutto ciò risentiranno, naturalmente, tutti i confronti che con quei dati vengono oggi stabiliti negli studi pluviometrici e idrografici, e si giungerà così all'anacronismo di considerare

come anormali dei dati che, viceversa, sono più prossimi a quelli normali della serie, di quanto non lo siano gli elementi del trentennio di riferimento. E quanto sto rilevando per Napoli vale ugualmente, come ho potuto dedurre da un complesso di ricerche comparative, per quasi tutta l'Italia centrale, meridionale e insulare. Con forte probabilità il fenomeno si riscontra anche nell'Italia settentrionale, benchè in misura variabile da regione a regione.

Per definire vieppiù l'incostanza e la variabilità del regime pluviometrico nel Napoletano, riporto i totali estremi per mesi, stagioni e semestri verificatisi nell'intera serie 1821-22=1950-51 :

MESE, STAGIONE, SEMESTRE	MASSIMI		MINIMI		MEDIA
	Totale	Epoca	Totale	Epoca	
Settembre	215.7	1910	0.0	1870	74.5
Ottobre	391.3	1918	7.3	1945	117.6
Novembre	352.0	1851	10.2	1897	116.7
Dicembre	287.0	1950	0.4	1843	113.6
Gennaio	276.4	1915	0.1	1859	97.5
Febbraio	197.1	1924	1.2	1894	74.7
Marzo	210.3	1865	2.9	1948	71.4
Aprile	169.2	1879 – 1919	0.5	1914	63.5
Maggio	198.3	1939	0.0	1865	50.0
Giugno	169.8	1868	0.0	1874	34.1
Luglio	147.2	1868	0.0	1871-1945 ecc	15.0
Agosto	174.1	1846	0.0	1880 ecc.	27.5
Autunno	641.5	1910	97.6	1861	308.8
Inverno	562.6	1914–15	75.3	1866	285.8
Primavera	413.3	1939	29.2	1830	184.9
Estate	336.5	1868	0.1	1928	76.6
Sem. invernale	922.0	1944–45	244.0	1879–80	594.6
Sem. estivo	507.6	1867–68	66.9	1830	261.5
Anno pluv.	1242.2	1910–11	472.3	1879–80	856.1

Ben quattro valori estremi si sono verificati nell'ultimo decennio 1941-42=1950-51 : il massimo assoluto del dicembre, il massimo assoluto del semestre invernale, il minimo assoluto dell'ottobre e quello del marzo.

Per completare la rassegna delle caratteristiche di instabilità e di variabilità del regime pluviometrico annuale nella zona del Napoletano riporto i dati relativi al massimo principale dell'annata, che costituisce la fase più significativa di quell'andamento, come ho dimostrato nella Nota (3). Detto massimo si è verificato nei mesi, con la frequenza, col valore più elevato, meno elevato e medio rispettivi indicati nel seguente specchietto:

M E S E	N. casi	Tot. massimo	Tot. minimo	Valore medio
Settembre	9	215.3	91.0	156.9
Ottobre	23	391.3	142.0	240.1
Novembre	32	352.0	105.5	184.4
Dicembre	34	287.0	106.6	189.7
Gennaio	15	276.4	101.7	173.3
Febbraio	7	187.9	104.1	122.7
Marzo	8	210.3	113.9	161.7
Aprile	2	150.2	105.7	128.0
Media compl.				186.8

Vi si rileva come il massimo principale cada più frequentemente nel novembre-dicembre, contrariamente a quanto risultava per l'ottantennio 1866-67=1945-46 i cui dati furono da me calcolati nella Nota (3). Resta così confermato che i massimi dell'ottobre sono più vistosi ma meno frequenti di quelli che si verificano nei due mesi successivi. La frequenza mensile più elevata spetta al dicembre e quella per stagioni all'autunno, ma con limitato vantaggio sull'inverno. In ben 32 dei 130 anni della serie il massimo principale è caduto nei primi mesi dell'anno civile successivo, ossia dopo la fase preminente dell'annata pluviometrica (fase terminante col dicembre) dimostrando così come spesso nello stesso anno civile concorrano, benchè artificiosamente, due massimi vistosi, appartenenti a due periodi piovosi consecutivi ma distinti. Ciò comprova ancora una volta la inadeguatezza della distribuzione dei totali mensili per anni civili ai fini degli studi di pluviometria, distribuzione alla quale ancora si attengono,

in linea generale, tra gli altri, gli Uffici del Servizio Idrografico, con evidente svantaggio per l' organicità e la razionalità delle ricerche.

Concludendo, quanto si è esposto in questa Nota è valso a precisare un fenomeno geografico regionale inerente alla fase preminente dell' andamento annuale delle precipitazioni, che risulta di transizione tra il regime sub-litoraneo dell' Italia centrale e quello oceanico della Sicilia soltanto nei casi ordinari, mentre in quelli eccezionali appartiene al primo o al secondo di detti regimi a seconda del prevalere, in ciascuna delle annate che si discostino dal comune, delle masse d' aria temperate o subtropicali sulla regione in esame, a individuare una nuova classificazione dei totali mensili denotanti una sovrabbondanza ben al di là di quella compatibile con una piovosità eccezionale contenuta entro i limiti della normalità, e dovuta, presumibilmente, al concorso di circostanze del tutto singolari, a stabilire il grado di attendibilità delle serie di dati relativi a pochi decenni, erroneamente ritenute idonee a rivelare il regime pluviometrico annuale di una località, a creare le premesse per uno studio organico e razionale dei fenomeni di sovraeccedenza e di carenza pluviometrica, di cui mi occuperò in altra occasione.

Casamicciola (Osservatorio Geofisico), dicembre 1954.

Diagrammi delle massime sollecitazioni nei ponti ad arco sottile e trave irrigidente

Nota del dott. **Tullio Renzulli**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 8 gennaio 1955)

Sunto. — Con riferimento all' arco sottile con trave irrigidente (ponti Maillart, ponti sospesi), trascurando le deformazioni per sforzo assiale rispetto a quelle, in generale molto maggiori, derivanti da caratteristica flessionale, si conduce uno studio atto alla ricerca delle linee di influenza della spinta, del momento flettente e dello sforzo di taglio per forze verticali viaggianti, e dei diagrammi delle massime sollecitazioni per carico uniforme.

1) *Premessa.*

Il sistema collaborante arco-trave, esempio di struttura nella quale la funzionalità degli elementi componenti è al massimo utilizzata, ha avuto fin dal secolo scorso la massima affermazione in America con la costruzione dei grandiosi ponti sospesi.

I ponti Maillart [2], simili ai primi nella schema teorico ma del tutto diversi nella pratica realizzazione poichè alla catena ed ai montanti tesi vengono sostituiti voltina e setti in calcestruzzo armato lavoranti a compressione, hanno avuto in Italia notevoli realizzazioni [1]). Lo schema è quello della fig. 1 ; il calcolo può condursi con la teoria del primo ordine (Rankine), considerando costanti le ordinate dell' arco in funzione dei carichi accidentali ; o mediante la teoria del secondo ordine (Freudhental, Dischinger, Franciosi [2]), tenendo conto delle deformazioni.

Le ipotesi a base delle due teorie sono [5] :

a) collegamento continuo arco-trave ;

b) profilo dell' arco parabolico ;

c) trascurabilità degli spostamenti orizzontali ;

d) rigidità totale, somma di quella dell'arco e di quella della trave costante.

Lo studio che si esegue è nello spirito della teoria del primo ordine

---

[1]) Basta ricordare il ponte sul vallone Corace (Catanzaro), progettato da A. Galli e V. Franciosi con la collaborazione di chi scrive, di 80 m di luce e 23,10 m di freccia ; la voltina ha uno spessore variabile da 0,55 a 0,60 m ; la trave irrigidente è alta 2 m.

[2]) Il moto del Franciosi [4], posteriore in ordine di tempo agli altri, presenta il vantaggio di una rapidissima convergenza.

e non tiene conto delle sollecitazioni che possono nascere per effetto delle deformazioni, elastiche o non elastiche [3].

2) *La linea di influenza della spinta.*

Si considera la struttura della fig. 1, nella quale l'unica incognita iperstatica è la componente orizzontale H della reazione della cerniera, conseguente all'azione dei carichi esterni.

Per ottenerne la linea d'influenza per forze verticali viaggianti sullo

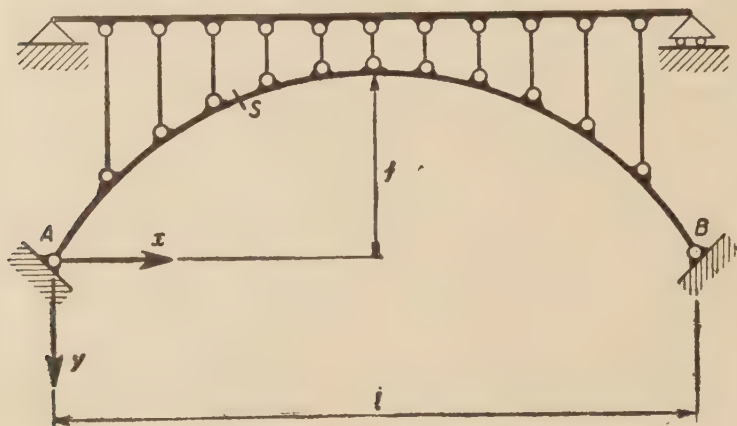



Fig. 1.

impalcato, si svincola la struttura sostituendo ad una cerniera di imposta un carrello e si applica un sistema distorcente (una forza orizzontale H_1) tale da provocare un allontanamento relativo unitario tra le imposte [1]. La deformata conseguente dell'asse della trave è la cercata linea d'influenza.

La voltina sia sagomata secondo un arco di parabola [1]), il momento flettente indotto dalla H_1 è dato in una generica sezione dal prodotto $H_1 y$, essendo y la quota ivi misurata dall'asse dell'arco rispetto alla congiungente le imposte.

L'asse dell'arco rappresenta perciò, in una opportuna scala, il diagramma del momento flettente, diagramma parabolico, affine cioè a quello indotto

[1]) L'asse della voltina viene sagomato secondo una funicolare del carico permanente, il quale aumenta verso le imposte sia per la maggiore altezza dei montanti, sia per la inclinazione dell'arco. La curva funicolare si innalza rispetto alla parabola passante per i punti di imposta e di chiave; lo scarto fra le due curve, che raggiunge il massimo in prossimità delle sezioni ad 1/4 e 3/4 di 1, è generalmente molto piccolo sì da ritenere l'ipotesi accettabile.

dal carico uniforme sulla trave semplice. La deformata, ossia la linea di influenza di H, è fornita da

$$\eta = h\,(\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4) \qquad (1)$$

essendo

h una costante da determinare
ξl l'ascissa x a partire da un estremo della trave.

Per la condizione di carico uniforme esteso a tutta la struttura l'impalcato non risulta sollecitato ove si prescinda dalle deformazioni della voltina e dei montanti dovute allo sforzo assiale.

Svincolata la struttura in corrispondenza di una cerniera e applicata all'estremo svincolato la reazione esterna, la voltina è soggetta agli sforzi corrispondenti alla funicolare del carico esterno, coincidente con il suo asse geometrico. In conseguenza della deformabilità dell'arco si genera uno avvicinamento relativo tra le imposte che vale

$$\Delta l = \frac{HL_m}{EA_m} \qquad (2)$$

essendo H la componente orizzontale della reazione

$$L_m = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx$$

A_m = area media della sezione dell'arco.

Per ristabilire la congruenza sorge una ΔH alle imposte, avente il valore dato dalla relazione

$$\frac{HL_m}{EA_m} + \frac{\Delta HL_m}{EA_m} + \frac{8}{15}\,\frac{\Delta H l f^2}{K} = 0 \qquad (3)$$

dove K indica la rigidità totale della struttura.

Il fenomeno è perfettamente analogo a quello della caduta di spinta negli archi rigidi. Stante la piccolezza del termine $\frac{L_m}{EA_m}$ di fronte all'alto $\frac{8}{15}\,\frac{lf^2}{K}$ e poichè si considerano gli effetti del carico accidentale e non del peso proprio, è lecito considerare nulla la ΔH e di conseguenza scarico l'impalcato.

Poichè il momento è fornito dalla relazione

$$M = M_0 - H\,y \qquad (4)$$

essendo M_0 il momento di trave appoggiata, per un carico uniforme di intensità unitaria esteso a tutta la struttura ed in corrispondenza della sezione di mezzeria si può scrivere

$$0 = \frac{l^2}{8} - \Omega f \tag{5}$$

essendo Ω l' area del diagramma della linea d' influenza della spinta.

Dalle (1) (5) si ricava immediatamente il valore, della costante h

$$h = \frac{5}{8}\frac{l}{f}. \tag{6}$$

La linea d' influenza della spinta ha pertanto l' espressione

$$\eta = \frac{5}{8}\frac{l}{f}(\xi - 2\xi^3 + \xi^4). \tag{7}$$

I valori della funzione in parentisi sono riportati nella tabella I

Tab. 1. Valori di $\varphi(\xi) = \xi - 2\xi^3 + \xi^4$

ξ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
$\varphi(\xi)$	0,0000	0,0497	0,0981	0,1437	0,1856	0,2226	0,2541	0,2793	0,2974	0,3088	0,3125

3. *Le linee d' influenza del momento flettente e dello sforzo di taglio.*

Il momento flettente e lo sforzo di taglio sono dati dalle ben note relazioni.

$$M = M_0 - Hy \tag{4}$$

$$T = T_0 - H tg\alpha. \tag{8}$$

Delle due la prima è trascritta dal paragrafo precedente; nella seconda si ha

T_0 taglio di trave semplicemente appoggiata
α angolo della tangente all' asse dell' arco con la congiungente le imposte.

Fissata una sezione S di ascissa $\xi_s l$ e quindi fissati due valori per $y = y_s$ e $tg\alpha = tg\alpha_s$, la linea d' influenza del momento (del taglio) si ottiene

sottraendo alla linea d'influenza della trave semplicemente appoggiata quella della spinta dopo averne moltiplicato le ordinate per la grandezza costante y_s ($tg\alpha_s$).

Le due curve H y_s e H $tg\alpha_s$ risultano affini alla linea d'influenza della spinta, e possono scriversi pertanto nella forma rispettivamente

$$\text{(9)} \qquad \mathrm{H}y_s = \eta'_s = a_s (\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4)$$

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{H}tg\alpha_s = \eta''_s = b_s (\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4).$$

Le due grandezze a_s e b_s, funzioni della ascissa della sezione in esame possono ricavarsi analogamente a quanto fatto per la linea d'influenza della H, dalla considerazione che, per carico uniforme esteso a tutta la struttura sia M che T risultano nulli.

Si ha pertanto, per carico unitario

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 - \int_0^l \eta'_s\, dx = 0 \qquad \frac{\xi\,\xi'_s\, l^2}{2} = a_s \frac{l}{5} \qquad a_s = 2{,}5\ \xi_s\, \xi'_s\, l.$$

Analogamente per il taglio

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{T} = \mathrm{T}_0 - \int_0^l \eta''_s\, dx = 0 \qquad \frac{\xi'^2_s - \xi^2_s}{2}\, l = b_s \frac{l}{5} \qquad b_s = 2{,}5\ (\xi'^2_s - \xi^2_s).$$

Dalle (9) (10) (11) (12) si ha

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{M} = \mathrm{M}_0 - 2{,}5\ \xi_s\, \xi'_s\, l\, (\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4)$$

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{T} = \mathrm{T}_0 - 2{,}5\ (\xi'^2_s - \xi^2_s)\, (\xi - 2\,\xi^3 + \xi^4).$$

Le linee d'influenza cercate risultano, come appare dalle (13) (14), indipendenti dal rapporto freccia-luce e dalle caratteristiche elastiche dei vari elementi.

Nella tabella 2 i valori di M vanno moltiplicati per la luce l, quelli di T forniscono direttamente le ordinate delle linee d'influenza del taglio.

4) *Linee dei massimi momenti e massimi tagli per carico uniforme.*

Si considera la sezione di ascissa ξ_s; la linea di influenza del momento si presenta, come già detto, come differenza le due M_0 e H y_s (v. fig. 2).

Tab. 2. Linee di influenze del momento e del taglio.

ξ		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\xi_s = 0$	T	1,0000	0,6547	0,3360	0,0647	— 0,1435	— 0,2812	— 0,3435	— 0,3353	— 0,2640	— 0,1453	0
$\xi_s = 0,1$	M	0	0,0679	0,0382	0,0128	— 0,0069	— 0,0203	— 0,0269	— 0,0272	— 0,0218	— 0,0121	0
	T	0	— 0,2962 0,7038	0,4288	0,1918	0,0052	— 0,1250	— 0,1948	— 0,2082	— 0,1712	— 0,0962	0
$\xi_s = 0,2$	M	0	0,0408	0,0858	0,0384	0,0010	— 0,0250	— 0,0390	— 0,0416	— 0,0342	— 0,0192	0
	T	0	— 0,2472	— 0,4784 0,5216	0,3188	0,1539	0,0313	— 0,0461	— 0,0812	— 0,0784	— 0,0472	0
$\xi_s = 0,3$	M	0	0,0185	0,0426	0,0966	0,0239	— 0,0141	— 0,0361	— 0,0434	— 0,0374	— 0,0215	0
	T	0	— 0,1981	— 0,3856	— 0,5541 0,4459	0,3026	0,1875	0,0126	0,0459	0,0144	0,0019	0
$\xi_s = 0,4$	M	0	0,0011	0,0086	0,0275	0,0616	0,0125	— 0,0184	— 0,0325	— 0,0314	— 0,0189	0
	T	0	— 0,1491	— 0,2928	— 0,4171	— 0,5487 0,4513	0,3437	0,2513	0,1729	0,0172	0,0509	0
$\xi_s = 0,5$	M	0	— 0,0113	— 0,0160	— 0,0088	0,0141	0,0547	0,0141	— 0,0088	— 0,0160	— 0,0113	0

Il massimo momento per carico uniforme si ottiene caricando i due tratti AC e DB. E' immediato constatare che, in valore assoluto, i due momenti sono uguali.

La ricerca dei punti C e D potrebbe farsi attraverso la conoscenza delle linee di influenza; si preferisce però un metodo diretto, per la maggiore precisione e per alcune interessanti considerazioni che ne derivano.

Fig. 2.

Con le notazioni della fig. 2 la retta r ha la equazione

(15) $\eta_r = \xi'_s x$,

la curva Hy (ξ_s) ha la equazione

(16) $\eta'_s = 2{,}5 \xi_s \xi'_s l (\xi - 2\xi^3 + \xi^4)$.

Imponendo la condizione

$$\eta_r = \eta'_s$$

si giunge per le (15) (16) alla equazione di 3° grado in ξ

$$\xi^3 - 2\xi^2 + 1 - \frac{1}{2{,}5\,\xi_s} = 0 . \tag{17}$$

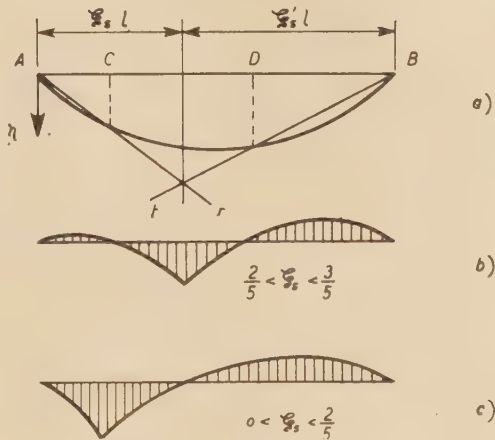
Dalla (17) appare che per

$$1 = \frac{1}{2{,}5\,\xi_s} \qquad \text{cioè per } \xi_s = \frac{2}{5}$$

il punto C cade in A; le due curve η_r ed η_s hanno per $\xi = 0$ la stessa tangente.

Per $\xi_s > \frac{2}{5} \left(< \frac{2}{5} \right)$ la η'_s ha nel punto $\xi = 0$ inclinazione maggiore (minore) di quella della retta r. Segue da quanto sopra che per le sezioni di ascissa ξ_s compresa nell' intervallo

$$\frac{2}{5} < \xi_s < \frac{3}{5}$$

la linea d' influenza presenta i due punti di nullo C e D; per sezioni esterne all' intervallo si ha un solo punto di nullo. Si tenga presente che, attesa la simmetria le considerazioni fatte per la retta r si riportano alla

retta t sostituendo ξ_s a ξ'_s e ξ a ξ'. Pertanto la soluzione della (17) è la distanza dal punto A del punto C relativo alla sezione ξ_s, e la distanza dal punto B dal punto D relativo alla sezione simmetrica di ξ_s rispetto alla mezzeria.

Risolta l' equazione (17) [1]) per valori di ξ_s compresi nell' intervallo

$$\frac{2}{5} < \xi_s < \frac{3}{5}$$

si ha per i massimi momenti dovuti a carico uniforme di intensità unitaria

$$\text{(18)} \qquad M_{max} = \int_A^C (\eta'_s - \eta_r)\,dx + \int_D^B (\eta'_s - \eta_t)\,dx.$$

Nelle (18) uno dei due integrali a secondo membro può mancare, come già detto.

Dalle (15) (16) (18) si ha

$$M_{max} = 2{,}5\,\xi_s\,\xi'_s\,l^2 \left(\frac{1}{2}\xi^2_c - \frac{1}{2}\xi^4_c + \frac{1}{5}\xi^5_c + \frac{1}{2}\xi'^2_d - \frac{1}{2}\xi'^4_d + \frac{1}{5}\xi'^5_d\right) +$$

$$\text{(19)} \qquad - \frac{1}{2} l^2 (\xi'_s\,\xi^2_c + \xi_s\,\xi'^2_d).$$

I valori sono riportati alla fine del paragrafo nella tabella 3.

Per i massimi tagli (v. fig. 3), analogamente a quanto fatto per i momenti si ricerca il punto E di intersezione della retta z di equazione

$$\text{(20)} \qquad \eta_s = \xi'$$

---

[1]) Per la soluzione della (17) si pone

$$y = \xi + \frac{2}{3}$$

e si ottiene

$$\text{(17')} \qquad y^3 - 3\frac{4}{9}y - 2\left(\frac{1}{5\xi_s} - \frac{5{,}5}{27}\right) = 0.$$

La (17') è della forma

$$y^3 - 3p\,y - 2q = 0$$

(equazione di 3° grado priva del termine quadratico).

Sono note le radici di questa equazione: quella che interessa è la radice reale tale che risulti

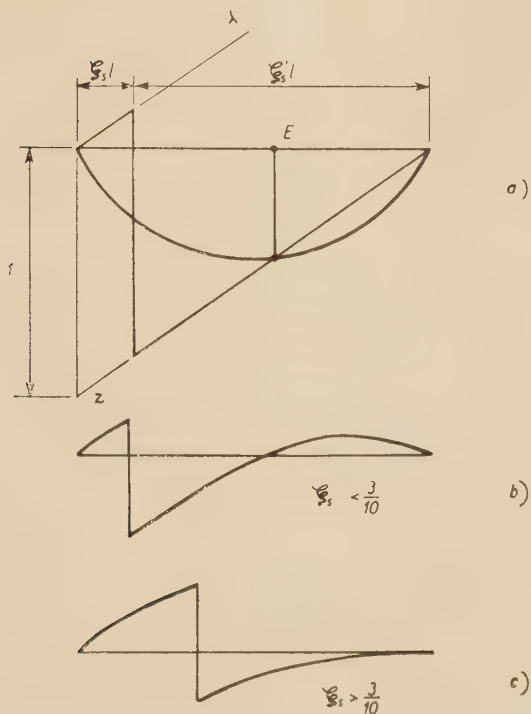
$$0 \leq \xi \leq 1.$$

con la curva di equazione

$$\eta_s'' = 2{,}5\,(\xi_s'^2 - \xi_s^2)\,(\xi' - 2\xi'^3 + \xi'^4). \tag{21}$$

Dalle (20) (21) facendo $\eta_s = \eta_s''$ si ha

$$\xi'^3 - 2\xi'^2 + 1 - \frac{2}{5}\,\frac{1}{\xi_s'^2 - \xi_s^2} = 0. \tag{22}$$

Fig. 8.

Dalle (22) appare che si hanno due punti di inversione nella linea d'influenza

$$\text{per } 1 > \frac{2}{5}\,\frac{1}{\xi_s'^2 - \xi_s^2} \qquad \text{cioè per } \xi_s < \frac{3}{10}.$$

Analogamente a quanto visto per il momento la linea di influenza presenta due punti di inversione per

$$\xi_s < \frac{3}{10} \qquad \text{oppure per } \xi_s > \frac{7}{10}.$$

Per le sezioni comprese nell' intervallo

$$\frac{3}{10} \leq \xi_s \leq \frac{7}{10}$$

si ha un solo punto di inversione.

Per carico uniforme unitario si ha

$$T_{max} = \int_O^{\xi_s l} (\eta_s'' - \eta_\lambda)\, dx + \int_E^L (\eta_s'' - \eta_z)\, dx =$$

$$= 2{,}5\, (\xi_s'^2 - \xi_s^2)\, l \left(\frac{1}{2}\, \xi_s^2 - \frac{1}{2}\, \xi_s^4 + \frac{1}{5}\, \xi_s^5 + \frac{1}{2}\, \xi_e'^2 - \frac{1}{2}\, \xi_e'^4 + \frac{1}{5}\, \xi_e'^5 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\, l\, (\xi_s^2 - \xi_e'^2).$$

La tabella 3 riporta i massimi momenti e tagli per carico uniforme. I valori di T vanno moltiplicati per pl, quelli di M per pl^2.

Tab. 3. Valori delle massime caratteristiche della sollecitazione.

ξ_s	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
M	0	0,0066	0,0115	0,0147	0,0164	0,0164	0,0153	0,0132	0,0102	0,0080	0,0072
T	0,1522	0,1195	0,0966	0,0817	0,0743	0,0752	0,0862	0,1018	0,1140	0,1217	0,1250

5) *Conclusione.*

Nella ipotesi di arco parabolico e di trascurabilità degli accorciamenti per sforzo assiale il ponte Maillart è isostatico, perchè l' una incognita H è ricavabile dalla considerazione che la voltina trasmette all'impalcato un carico uniforme.

La stessa considerazione può farsi per un ponte sospeso a due cerniere, per il quale però l' ipotesi è più discosta dalla realtà, data la maggiore elasticità della catena. In tal caso entrano in gioco gli elementi elastici delle varie parti della struttura [6].

A titolo di esempio si riportano nella fig. 4 i diagrammi dei massimi e minimi momenti ricavati

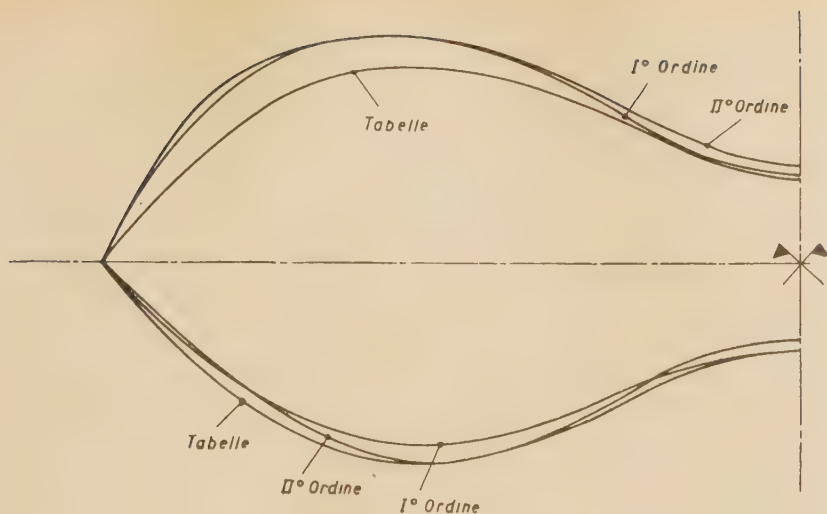



Fig. 4.

a) con le tabelle,
b) con la teoria del I ordine,
c) con la teoria del II ordine,
per il citato ponte sul Corace.

Università di Napoli, Ist. di Sc. delle Costr., Cattedra di Ponti, Gennaio 1955.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Galli. *Scienza delle Costruzioni*, vol. I. Pellerano, Napoli.
2. M. Bill. *Robert Maillart.* Vergal für Architekur AG. Zurigo, 1950.
3. A. Galli e V. Franciosi. *I Ponti a volta sottile ed impalcato irrigidente in regime viscoso.* L'Ingegnere, 1934, n. 8.
4. V. Franciosi. *Il metodo della « linea di influenza del secondo ordine » per la ricerca della spinta addizionale nei ponti a travata irrigidente.* La Ricerca, anno II, n. 1, Napoli.
5. T. Renzulli. *Le sollecitazioni di origine termica nei ponti Maillart.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Serie 4ª, vol. XX, Napoli, 1953.
6. D. B. Steinman. *Suspension Bridges.* John Wiley, New York, 1949.

Misure in alta frequenza della conducibilità di elettroliti forti e deboli

Nota della dott. Anna Cibelli, *presentata dal socio* A. Carrelli

(Adunanza del dì 8 gennaio 1955)

Sunto. — In questa Nota vengono esposte misure di conducibilià fatte al ponte di Kohlrausch ed in alta frequenza di soluzioni di alcuni sali con $\nu = 7.10^6$ di elettroliti forti e per soluzioni di NH_4OH e CH_3COOH; mentre per le due ultime soluzioni il rapporto delle due conducibilità è costante al variare di $\sqrt{\gamma}$, per i sali studiati questo rapporto decresce al crescere di $\sqrt{\gamma}$, e poichè in questo campo di concentrazione si suppone che le deviazioni dipendono dalla presenza di un raggio jonico, queste esperienze mostrano che in questa concezione per interpretare i risultati ottenuti è necessario che sia presa in considerazione un' azione dipendente dalla frequenza del campo elettrico.

Le misure di conducibilità delle soluzioni elettrolitiche in alta frequenza presentano il fenomeno della dispersione, messo in evidenza teoricamente da Debye, e riscontrato effettivamente, dal punto di vista sperimentale, da vari ricercatori.

Questo effetto compare soltanto per bassi valori della concentrazione, quindi per soluzioni più concentrate la conducibilità di una soluzione elettrolitica in alta frequenza dovrebbe corrispondere a quella che si ha per frequenze nulle, o quasi nulle.

Ora nel campo delle concentrazioni più elevate si hanno, com' è ben noto, deviazioni dalla legge di Debye, deviazioni che, almeno schematicamente, possono considerarsi di due tipi nettamente distinti ; si può cioè riscontrare una deviazione della legge di linearità rispetto a $\sqrt{\gamma}$, e queste deviazioni possono giustificarsi teoricamente qualora o si consideri non trascurabile il raggio degli joni, oppure si consideri presente un processo di associazione fra di essi. E' da notare che le due azioni agiscono in senso opposto, ed infatti la presenza di un raggio jonico porta a valori della conducibilità *più alti* di quelli previsti dalla teoria di Debye, mentre invece l' associazione porta a valori *più bassi*.

Ci siamo proposti di ricercare, se è possibile, almeno con il metodo già adoperato da altri ricercatori per misure di conducibilità in alta frequenza, di ottenere indicazioni sul comportamento degli elettroliti forti e deboli in alta frequenza sotto questo riguardo. Il metodo adoperato in questa ricerca è quello già precedentemente descritto in altri lavori [1]), in

[1]) Carrelli A. e Rescigno L., Nuovo Cimento, vol. VII, n. 1, 1950.

cui si è trattato lo stesso argomento. La ricerca è stata limitata ad elettroliti monovalenti e bivalenti, e precisamente ai seguenti: $NaNO_3$, KNO_3, K_2SO_4, $CuSO_4$, NH_4OH e CH_3COOH; le misure di conducibilità fatte al ponte di KOHLRAUSCH, e cioè per frequenze molto basse, dimostrano che in questi elettroliti si riscontrano anomalie che possono attribuirsi all'azione dipendente dal raggio jonico, in quanto che si hanno le deviazioni proprio nel senso previsto per quella particolare azione.

Ora soluzioni di sali suddetti, con concentrazioni piuttosto elevate ($\sqrt{\gamma}$ variabile da 3 a 10), sono state misurate contemporaneamente al ponte di KOHLRAUSCH e con il dispositivo per alta frequenza precedentemente descritto, la frequenza adoperata è $\nu = 7.10^6$.

Se ci fosse azione analoga di comportamento per i due campi, e cioè per frequenze basse e per alte frequenze, era da prevedersi lo stesso andamento.

Si riportano nella Tabella i valori dei rapporti Λ_ω/Λ_0 (per gli elettroliti forti, per quelli deboli che sono stati indagati il rapporto è sempre costante). Come vedesi, per tutti questi sali mono e bivalenti il rapporto decresce al crescere di $\sqrt{\gamma}$ e ciò significa evidentemente, dato che per questi sali Λ_0 decresce al crescere di $\sqrt{\gamma}$, che questa diminuzione è più rapida per la conducibilità in alta frequenza.

Come si è detto, una conducibilità maggiore di quella presentata dalla legge di DEBYE $\Lambda = \Lambda_\omega - \theta \sqrt{\gamma}$ per $\sqrt{\gamma}$ crescente può facilmente attribuirsi alla presenza di un raggio jonico. Queste misure dimostrano allora che nella ammissione formale di questo raggio jonico bisogna tener conto del fatto che esso fa sentire maggiormente la sua azione in alta frequenza. Fatto, questo, che non si verifica per elettroliti deboli. Ricerche ulteriori dovranno chiarire questo punto.

TABELLA

KNO_3		$NaNO_3$		K_2SO_4		$CuSO_4$		KNO_3	
$\sqrt{\gamma}$	Λ_ω/Λ_0	$\sqrt{\gamma}$	Λ_ω/Λ_0	$\sqrt{\gamma}$	Λ_ω/Λ_0	$\sqrt{\gamma}$	Λ_ω/Λ_0	$\sqrt{\gamma}$	Λ_ω/Λ_0
3.1	1.14	3.1	1.64	3.1	1.66	3.1	1.50	3.1	1.30
4.3	1.12	4.2	1.82	4.4	1.60	4.4	1.36	4.6	1.30
6.4	1.13	6.3	1.64	6.3	1.40	6.3	1.47	6.3	1.28
7.6	1.06	7.6	1.54	7.6	1.22	7.6	1.46	7.6	1.51
9.0	1.00	9.0	1.45	9.0	1.31	9.0	1.81	9.5	1.80
10.0	1.05	10.0	1.4	10.0	1.37	10.0	2.0	10.0	1.98

Ancora in margine alla indipendenza dei principî di reciprocità

Nota del socio ordinario **Adriano Galli**

(Adunanza del dì 5 febbraio 1955)

Sunto. — Rilevato che il primo ed il secondo principio di reciprocità rientrano, come casi particolari, nel principio di Betti generalizzato, si accenna ad un artificio che permette di pervenire al secondo principio di reciprocità per via elementare, senza bisogno di sconnettere la struttura.

Si rileva l'opportunità di pervenire al tracciamento delle linee di influenza operando sconnessioni semplici anzichè tagli totali

Il dibattito, più volte ricorrente, relativo all'autonomia del secondo principio di reciprocità, è stato recentemente ripreso dallo Zanaboni [1]), il quale, a seguito della introduzione della « pseudodistorsione », riconduce l'azione di una distorsione concentrata tra facce piane in una struttura monodimensionale a quella di due forze uguali e contrarie agenti su due sezioni vicinissime della struttura integra. Ne deriva, per usare le stesse parole dell'Autore, che « il secondo teorema di reciprocità viene addirittura ad immedesimarsi nel primo ».

Nella sua replica [2]), il Colonnetti asserisce che si tratta « di un artificio discutibile e controproducente se ci si pone dal punto di vista della chiara comprensione dei due teoremi e della loro indiscutibilmente diversa funzione nell'economia del pensiero scientifico ».

L'obiezione del Colonnetti in merito alla non applicabilità della teoria del de Saint-Venant ai tronchi di trave corti è facilmente rimossa, purchè invece di forze e coppie finite agenti sugli estremi del tronco si parli di distribuzioni diffuse di sforzi elementari equivalenti ad una forza o ad una coppia: è questa del resto la considerazione che permette l'estensione dei risultati del de Saint-Venant alle travi reali.

Epperò, più delle sottili discussioni di dettaglio, ritengo utile mettere a fuoco una questione di fondo.

Poichè le distorsioni, intese come deformazioni non dipendenti da forze esterne (esempio classico le variazioni termiche), sono entrate di autorità dal campo puramente speculativo in quello più strettamente tecnico, si impone un loro affiancamento alle forze esterne, in piena parità di diritti, sul piano più generale di ente sollecitante. Pertanto può sembrare

---

[1]) O. Zanaboni. *Questioni inerenti al secondo teorema di reciprocità ed alle linee d'influenza.* L'Ingegnere. Roma, 1954.

[2]) G. Colonnetti. *A proposito del secondo principio di reciprocità.* Rend. Accademia Lincei. Roma, 1954.

limitativo far riferimento ad una particolare distorsione, concentrata tra facce piane, derivante dall'azione di due forze esterne, poichè restano fuori di questo ambito tutti gli svariati tipi di distorsioni, concentrate tra facce non piane, termiche, di ritiro, plastiche, viscose, di precompressione, ecc., che pur così da vicino interessano il tecnico.

In questo ordine di idee sembra superata la discussione circa l'autonomia o meno del secondo teorema di reciprocità (cui non può negarsi un indubbio merito nello sviluppo storico della Scienza delle Costruzioni), considerato che sia il primo che il secondo derivano dalla feconda matrice del teorema di Betti generalizzato.

Definito L_{12} il lavoro mutuo di due sistemi, ciascuno costituito da forze e da distorsioni, applicati ad una struttura, la somma del lavoro che le forze del primo sistema compiono per effetto degli spostamenti del secondo e di quello che le caratteristiche della sollecitazione del primo compiono per effetto delle distorsioni del secondo, il teorema di Betti generalizzato assicura, entro gli stessi limiti del teorema di Betti classico, la eguaglianza $L_{12} = L_{21}$. Da questo teorema, dimostrato nel 1949, nel corso di alcuni studi sulle distorsioni svolti nel mio Istituto [1]), e più tardi confermato dal Colonnetti [2]), possono farsi discendere, come casi particolari, il primo e il secondo teorema di reciprocità, nonchè il teorema di Volterra relativo all'eguaglianza dei lavori mutui svolti da due sistemi di distorsioni. Ad esempio, il teorema di Betti generalizzato permette di scrivere, con riferimento alle strutture delle fig. 1*a* ed 1*b*,

$$1 \cdot v - M_s \, \Delta\varphi = 0$$

da cui

$$M_s = \frac{v}{\Delta\varphi}$$

espressione caratteristica del secondo principio di reciprocità [3]).

Sembra anche proficuo, in tema di secondo principio di reciprocità, fare qualche considerazione sul pratico tracciamento delle linee d'influenza; e precisamente mostrare come, per la quasi totalità delle strutture monodimensionali, sia più conveniente operare sconnessioni semplici invece che tagli completi lungo una sezione retta. Il procedimento, già da tempo seguito da parecchi Autori con riferimento a casi molto particolari (ad

---

[1]) V. Franciosi. *Sulle linee d'influenza di coazioni.* L'Industria Italiana del cemento. Marzo 1950.

[2]) G. Colonnetti. *Comptes rendus de l'Academie des Sciences.* Paris, 21 e 28 Sett. 1953.

[3]) Si vuole qui esplicitamente notare come, volendo pervenire al secondo principio di reciprocità senza sconnettere la struttura, la via più semplice può

es. per la ricerca [1]) delle linee d'influenza delle reazioni esterne, in conformità del secondo teorema di Maxwell, o del momento su un appoggio di una trave continua [1]) [2])), è di carattere del tutto generale. Se in corrispondenza di una qualsiasi sezione S di una struttura monodimensionale si desidera la linea di influenza della generica caratteristica C, è sufficiente creare in S la sconnessione semplice che annulla la caratteristica C, e applicare alle due facce, unite dal particolare vincolo di cui si tratta, due sollecitazioni C e $-$C uguali e contrarie: la deformata che ne deriva fornisce la linea

---

essere quella che segue: si consideri la struttura della fig. 1, e in corrispondenza della sezione S si faccia agire, in corrispondenza del tronco elementare lungo *ds*, una variazione termica ad andamento lineare lungo l'altezza *h* della sezione, annullantesi nel baricentro di quest'ultima, e tale che

fig. 1

$$\frac{\alpha \Delta t ds}{h} = -\Delta\varphi;$$

Δt è la somma delle variazioni termiche all'estradosso e all'intradosso; di queste la prima sia negativa, la seconda positiva.

Il principio dei lavori virtuali, applicato al sistema di forze equilibrate della fig. 1*a* ed al sistema congruente di spostamenti della fig. 1*b*, fornisce

$$1 \cdot v - M_s \Delta\varphi = \int_s \frac{M M' ds}{EI};$$

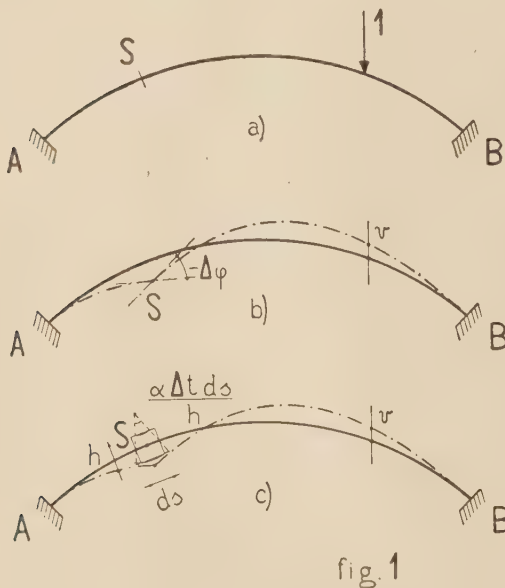
lo stesso principio, applicato alle forze della fig. 1*b* ed agli spostamenti della 1*a*, fornisce

$$0 = \int_s \frac{M' M\, ds}{EI},$$

pertanto si perviene ancora alla

$$1 \cdot v - M_s \Delta\varphi = 0.$$

[1]) S. Timoshenko. *Strength of materials*. Vol. I, pag. 334, 336, 337. D. Van Nostrand Company, New York, 1940.

[2]) F. Schleicher. *Tascenbuch für bauingenieure*, p. 1423 Berlino. Springer. 1949.

di influenza della C in S, nella scala in cui lo spostamento relativo tra le due facce unite dal vincolo in S è pari a -1 [1]). Si consideri infatti la struttura caricata da una forza verticale unitaria diretta verso il basso (fig. 2*a*); siano M_s, N_s e T_s le caratteristiche della sollecitazione interna in

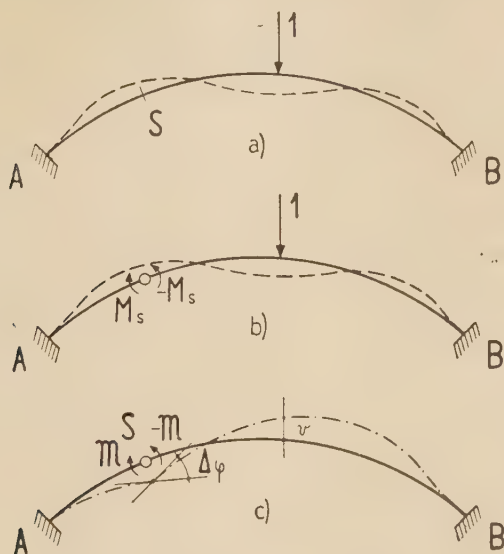



fig. 2

corrispondenza della sezione S. Se in S si introduce una cerniera, e si applicano sulle due facce da essa unite fig. 2*b* due coppie eguali in valore e segno al momento flettente M_s, le deformazioni e le sollecitazioni della struttura restano inalterate [2]).

Si consideri la struttura della fig. 2*b* caricata da due coppie eguali e contrarie $\mathfrak{M}$ e $-\mathfrak{M}$ sulle due facce unite della cerniera in S (fig. 2*c*); il principio di Betti classico permette di scrivere

$$1 \cdot v - M_s \, \Delta\varphi = 0$$

da cui

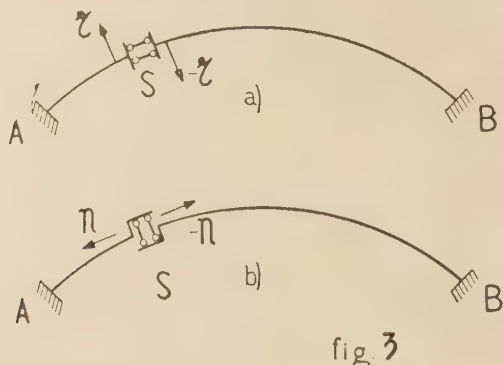
$$M_s = \frac{v}{\Delta\varphi} .$$

---

[1]) A. Galli. *Scienza delle Costruzioni*. Vol. I, Ed. Pellerano e Del Gaudio, Napoli, 1950.

[2]) Si pensi di effettuare un taglio in S; se sulle due facce risultanti dal taglio si applicano come forze esterne le caratteristiche M_s e $-M_s$, N_s e $-N_s$, T_s e $-T_s$, l'assetto della nuova struttura è identico a quello della struttura integra. Poichè quindi i baricentri delle due facce risultanti dal taglio non hanno subito spostamenti relativi, essi possono essere congiunti con una cerniera.

Se in S si desidera la linea d'influenza del taglio e dello sforzo normale, le sconnessioni semplici da realizzare sono quelle della (fig. 3*a*) e (3*b*); nel primo caso sulle due facce in S si applicano due forze τ e $-\tau$, normali all'asse, e tali da generare tra di esse uno scorrimento unitario

fig. 3

e negativo; nel secondo caso le due forze da applicare, $\mathfrak{N}$ e $-\mathfrak{N}$, sono tangenti all'asse, e tali da generare uno spostamento assiale relativo unitario e negativo.

Operando come si è suggerito, si ottiene sul piano didattico il sostanziale vantaggio di caratterizzare immediatamente la natura del sistema distorcente; inoltre non si interrompe la continuità della struttura; si evita perciò, in presenza di strutture una o due volte iperstatiche, l'artificio degli spostamenti rigidi per il ripristino della congruenza; si opera su schemi il cui grado di iperstaticità è inferiore di un'unità a quello di partenza. La deformata presenta necessariamente la discontinuità corrispondente alla caratteristica in esame, poichè essa è determinata, a meno di una costante, dalla natura della sconnessione semplice. Nel caso di sezioni particolari (ad es. nella determinazione della linea d'influenza del momento su di un appoggio, in una trave continua) scompaiono le difficoltà concettuali connesse con la prassi del taglio totale.

Per contro il procedimento del taglio totale consente di utilizzare la teoria dell'ellisse di elasticità alla completa determinazione del sistema distorcente.

Utilizzando il criterio sopra esposto si trattano gli stessi esempi contenuti nella nota dello ZANABONI.

I° esempio. Linea d'influenza del momento per una trave a sezione costante, vincolata con incastro ed appoggio.

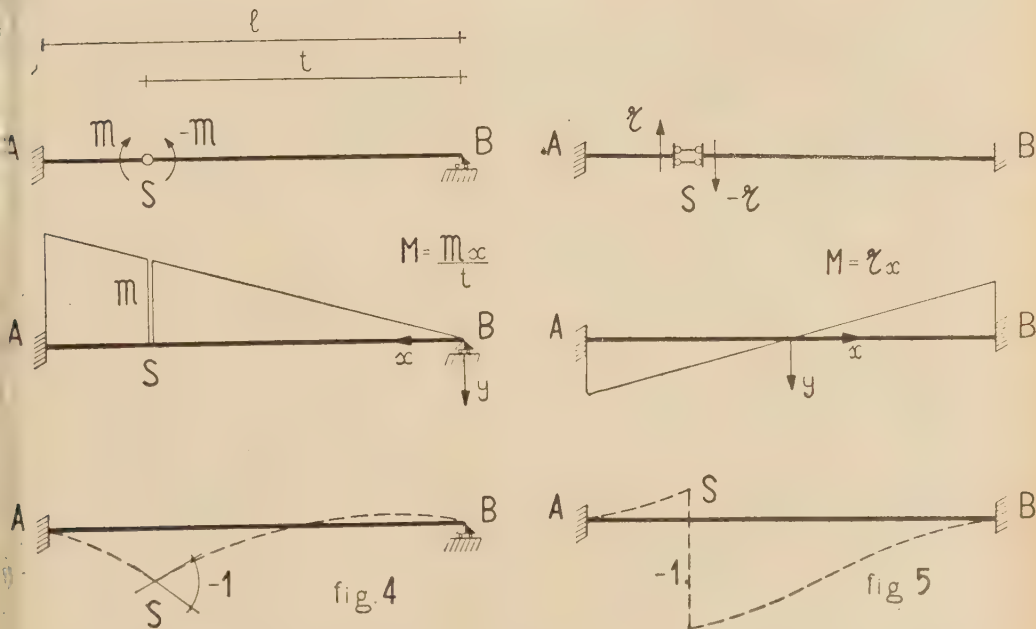
Si pone in S una cerniera, e sulle due facce da essa unite si fanno agire due coppie M e $-$M; si ha

$$M = \frac{M\,x}{l}$$

e dalla condizione che l' angolo di rotazione relativa in S sia unitario si trae

$$\int_0^l \frac{M^2 dx}{EI} = \mathfrak{M} \cdot 1$$

da cui

$$\mathfrak{M} = \frac{3t^2 EI}{l^3}$$

Dal diagramma degli M è immediato il tracciamento della linea richiesta.

2^o *esempio.* Linea d' influenza del taglio per una trave a sezione costante con due incastri nelle sezioni di estremità.

Si pone in S un vincolo come quello della fig. $3a$; risulta così

$$M = \tau x$$

$$2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2 dx}{EI} = \tau \cdot 1$$

da cui

$$\tau = 12 \frac{EI}{l^3} .$$

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, gennaio 1955.

Inviluppo e congruenza delle tangenti ai rami di una falda bidimensionale piana o tridimensionale dell' S_3

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 5 febbraio 1955)

Sunto. — Si studia l'inviluppo delle tangenti ai rami naturali di una falda piana nelle loro origini (§ 1) e la congruenza delle tangenti ai rami naturali di una falda tridimensionale dell' S_3 nelle loro origini, nel caso che l'origine della falda sia un punto, o una curva o una superficie, e con l'esponente all'origine qualunque (§ 2).

§ 1.

Inviluppo delle tangenti ai rami naturali di una falda bidimensionale piana nelle loro origini.

Sia data la falda piana di equazioni

$$(1) \qquad x_j = f_{m_0}^{(j)}(\lambda, \mu) + f_{m_1}^{(j)}(\lambda, \mu) + \ldots + f_{m_s}^{(j)}(\lambda, \mu) + \ldots$$

con $j = 1, 2, 3$, $f_{m_s}^{(j)}(\lambda, \mu)$ forma di grado m_s, con le condizioni $m_0 < m_1 < < m_2 < \ldots < m_s < \ldots$

L'intero m_0 è l'*esponente all'origine* della falda. Se è $m_0 = 0$ l'origine della falda è un punto. Se è $m_0 > 0$ l'origine della falda può essere una curva. In ogni caso l'origine è rappresentata, nel piano $S_2(x_1, x_2, x_3)$, dall'equazioni:

$$(2) \qquad x_j = f_{m_0}^{(j)}(\lambda, \mu) \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Al ramo di retta, di origine O (0, 0), di equazioni:

$$(3) \qquad \lambda = h\rho \ , \qquad \mu = k\rho \ ,$$

del piano (λ, μ), corrisponde nella falda il ramo di equazioni:

$$(4) \qquad x_j = \rho^{m_0} f_{m_0}^{(j)}(h, k) + \rho^{m_1} f_{m_1}^{(j)}(h, k) + \ldots$$

col parametro ρ. Dividendo i secondi membri per ρ^{m_0} nel caso che sia $m_0 > 0$, si hanno l'equazioni del ramo nella forma:

$$(4_1) \qquad x_j = f_{m_0}^{(j)}(h, k) + \rho^{m_1 - m_0} f_{m_1}^{(j)}(h, k) + \ldots$$

Nel caso che sia $m_1 = m_0 + 1$ (caso generico) e quindi $m_1 - m_0 = 1$ le equazioni parametriche della retta tangente al ramo (4_1) nel punto origine

$$(5) \qquad A\left(f_{m_0}{}^{(j)}(h, k)\right),$$

[che al variare di h e k, cioè della retta (3) nel fascio di centro O (0, 0), descrive l' origine del ramo di equazioni (2)] sono date da:

$$(6) \qquad x_j = f_{m_0}{}^{(j)}(h, k) + \rho f_{m_1}{}^{(j)}(h, k),$$

costituenti la prima ridotta della falda dopo l' origine. Tale tangente è la retta congiungente l' origine A del ramo con il punto

$$(7) \qquad B\left(f_{m_1}{}^{(j)}(h, k)\right).$$

Se, in particolare, è $m_0 = 0$, e quindi, per l' ipotesi fatta $m_1 = 1$, l' *origine della falda* è il punto A. Il punto B di coordinate (7) nel caso generico descrive la retta di equazioni [lineari in h, k, essendo $m_1 = 1$]

$$(8) \qquad x_j = f_{m_1}{}^{(j)}(h, k).$$

In tale caso, perciò, le tangenti agli ∞^1 rami naturali considerati descrivono il fascio di centro A ottenuto congiungendo A con i punti B della retta di equazioni (8).

Se è invece $m_0 > 0$ l' origine A del ramo (4_1) di coordinate (5) descrive, nel caso generico, una curva c^{m_0} di ordine m_0, *origine della falda*, di equazioni parametriche (2) Il punto B, di coordinate (7), descrive la curva c^{m_1} di equazioni parametriche (8), di ordine $m_1 = m_0 + 1$. La retta $r = AB$, congiungente il punto A di c^{m_0} con il punto B di c^{m_1}, rispondenti alla stessa coppia di parametri (h, k) omogenei [e quindi ad una stessa retta del fascio del piano (λ, μ) di centro O (0, 0)] ha per coordinate i minori estratti dalla matrice

$$(9) \qquad \left\| \begin{matrix} f_{m_0}{}^{(1)}(h, k) & f_{m_0}{}^{(2)}(h, k) & f_{m_0}{}^{(3)}(h, k) \\ f_{m_1}{}^{(1)}(h, k) & f_{m_1}{}^{(2)}(h, k) & f_{m_1}{}^{(3)}(h, k) \end{matrix} \right\|$$

Tali tre minori risultano funzioni omogenee di h, k, di grado $m_0 + m_1 \quad 2m_0 + 1$. Ne segue che la retta $r = AB$, al variare di h, k, descrive un inviluppo di equazioni parametriche [in cordinate di retta (a_1, a_2, a_3)]

$$(10) \qquad a_j = F_j(h, k),$$

con $F_j(h, k)$ forme di grado $2m_0 + 1$ in h, k. Tale inviluppo risulta, pertanto, di classe $2m_0 + 1$. Si ha perciò :

I) *Le tangenti ai rami naturali della falda nella loro origine nel caso generico (e quindi con $m_1 = m_0 + 1$) costituiscono un inviluppo di classe $2m_0 + 1$.*

Nel caso sia $m_1 - m_0 > 1$ posto, nelle (4_1) ,

$$(11) \qquad \rho^{m_1 - m_0} = t$$

le (4_1) dànno l' equazioni :

$$(4_2) \qquad x_j = f_{m_0}^{(j)}(h, k) + t f_{m_1}^{(j)}(h, k) ,$$

le quali mettono in evidenza che le (4_1) rappresentano sempre una retta $r = AB$. In questo caso però i minori della matrice (9) risultano di grado $m_0 + m_1 > 2m_0 + 1$ essendo $m_1 > m_0$, e la differenza fra gli ordini delle due curve c^{m_0} e c^{m_1} è > 1. *La classe dell' inviluppo descritto dalla retta $r = AB$ sarà $m_0 + m_1$.*

§ 2.

Congruenza delle tangenti ai rami naturali di una falda tridimensionale di S_3 nei punti origini.

Sia data in $S_3(x_1, \ldots, x_4)$ una falda tridimensionale di equazioni :

$$(1) \qquad x_j = f_{m_0}^{(j)}(\lambda, \mu, \eta) + f_{m_1}^{(j)}(\lambda, \mu, \eta) + \ldots + f_{m_s}^{(j)}(\lambda, \mu, \eta) + \ldots \quad (j = 1, \ldots, 4)$$

con $f_{m_s}^{(j)}(\lambda, \mu, \eta)$ forma di grado m_s in λ, μ, η, con

$$0 \leq m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_s < \ldots$$

L' intero m_0 è l' *esponente all' origine* O_t della falda, di equazioni parametriche :

$$(2) \qquad x_j = f_{m_0}^{(j)}(\lambda, \mu, \eta) ,$$

con i tre parametri omogenei (λ, μ, η).

Nel caso $m_0 = 0$ tale origine è un punto O_0. Nel caso m_0 1 tale origine è :

a) un punto O_0, se le quattro forme *lineari* $f_1^{(j)}(\lambda, \mu, \eta)$ soddisfano identicamente a tre equazioni lineari, linearmente indipendenti.

b) una retta O_1, se tali quattro forme lineari soddisfano a due equazioni linearmente indipendenti.

c) un piano O_2 se tali quattro forme lineari soddisfano ad una sola equazione lineare.

Nel caso $m_0 > 1$ tale origine è:

a_1) un punto se le quattro forme $f_{m_0}^{(j)}(\lambda, \mu, \eta)$ sono ottenute da una stessa forma moltiplicata per quattro numeri (non tutti nulli),

a_2) una curva O_1 se dette forme soddisfano identicamente a due equazioni omogenee non equivalenti.

a_3) una superficie O_2 se le quattro forme soddisfano ad una sola equazione omogenea. La sezione piana di tale superficie, con il piano di equazioni:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 , \tag{3}$$

è rappresentata nel piano S_2 in cui si assumono come coordinate omogenee (λ, μ, η), dalla curva:

$$a_1 f_{m_0}^{(1)}(\lambda, \mu, \eta) + \ldots + a_4 f_{m_0}^{(4)}(\lambda, \mu, \eta) = 0. \tag{4}$$

Tale curva, al variare dei coefficienti a_j, descrive, nel caso generico, uu sistema lineare ∞^3 di curve di ordine m_0, *semplice, di grado* m_0^2, e quindi l'origine O_2, in tal caso generico, è, per $m_0 = 2$ una superficie di Steiner, per m_0 qualunque una superficie razionale di ordine m_0^2.

Ciò premesso consideriamo nell'S_3 *euclideo* (λ, μ, η) la retta della stella di centro (0, 0, 0), di equazioni parametriche:

$$\lambda = h\rho , \qquad \mu = k\rho , \qquad \eta = p\rho . \tag{5}$$

A tale retta risponderà nella falda di equazioni (1) il *ramo naturale* le cui equazioni si ottengono sostituendo le (5) nelle (1). Dividendo i secondi membri per il fattore comune ρ^{m_0}, le equazioni di tale ramo naturale risultano:

$$x_j = f_{m_0}^{(j)}(h, k, p) + \rho^{m_1 - m_0} f_{m_1}^{(j)}(h, k, p) + \rho^{m_2 - m_0} f_{m_2}^{(j)}(h, k, p) + \ldots \tag{6}$$

La prima ridotta di questo ramo, posto

$$\rho^{m_1 - m_0} = q , \tag{7}$$

ha le equazioni :

$$(7) \qquad x_j = f_{m_0}^{(j)}(h, k, p) + f_{m_1}^{(j)}(h, k, p)\, q \ ,$$

rappresentanti la retta AB congiungente i due punti

$$(8) \qquad A\,(x_1', \ldots, x_4') \ , \qquad B\,(x_1'', \ldots, x_4'')$$

di coordinate (x_j') ed (x_j'') date da :

$$(9) \qquad x_j' = f_{m_0}^{(j)}(h, k, p)$$

$$(10) \qquad x_j'' = f_{m_1}^{(j)}(h, k, p)$$

La retta AB è la tangente al ramo nell'origine A. Se è $m_1 - m_0 \quad 1$ (ciò che si ha *nel caso generico*) tale tangente al ramo nell' origine A è a contatto bipunto.

Al variare della retta di equazioni (5) nella stella di centro O (0, 0, 0) (cioè di h, k, p) i due punti A e B descrivono, *nel caso generico*, due superficie V_2' e V_2'' di equazioni parametriche (9) e (10), razionali di ordine m_0^2 ed $m_1^2 = (m_0 + 1)^2$, rappresentati nel piano (h, k, p) (con h, k, p coordinate omogenee) in modo che i due punti A e B rispondono allo stesso punto (h, k, p), sicchè A e B si corrispondono in una corrispondenza (1, 1) fra le due superficie V_2' e V_2''. L' insieme delle rette AB costituisce, pertanto, una congruenza. Si noti ora che la superficie V_2' non è altro che la superficie 0_2 origine della falda di equazioni parametriche (2) che, coincidono, con le (9) per $x_j = x_j'$, $\lambda = h$, $\mu = k$, $\eta = p$.

Nel caso particolare che l' *origine della falda sia un punto* O_0 il punto A cade sempre in O_0 e quindi *le* ∞^2 *rette* AB *costituiscono la stella di centro* O_0, supposto, sempre, che le (10) rappresentino una superficie, e che non sia un piano passante per O_0.

In generale si ha :

II) *Le tangenti ai rami naturali della falda tridimensionale generica dell'* S_3 *avente l' origine in una superficie* V_2' *di ordine* m_0^2, *costituiscono una congruenza ottenuta congiungendo le coppie di punti* (A, B) *corrispondentisi in una corrispondenza* (1, 1) *fra la superficie origine* V_2' *e una superficie* V_2'' *razionale di ordine* m_1^2 |*con* m_1 *nel caso generico eguale ad* $m_0 + 1$|.

Prolungamento di una ipersuperficie dell' S_r complesso nel campo quadripotenziale

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 2 aprile 1955)

Sunto. – Si studia la 1ª rappresentazione complessa della ipersuperficie dell' S_r complesso, prolungata nell' S_r quadripotenziale, con una varietà dello S_{4r+3} complesso, costituita da un sistema di ∞^{r-1} varietà generatrici di dimensione $3r$ e di ordine 6.

Premessa.

Lo studio della rappresentazione complessa di una ipersuperficie V_{r-1} algebrica dell' S_r complesso irriducibile di equazione:

$$f(x_1, \ldots, x_{r+1}) = 0 ,$$

prolungata nel campo quadripotenziale, equivale allo studio della varietà dell' S_{4r+3} rappresentata dal sistema di equazioni:

$$(T) \quad \begin{cases} \text{(I)} \quad f(x_i) = 0 \\ \text{(II)} \quad D\big(f(x_i)\, y_i\big) = 0 \\ \text{(III)} \quad D\big(f(x_i)\, z_i\big) + \dfrac{1}{2} D^{(2)}\big(f(x_i)\, y_i\big) = 0 \\ \text{(IV)} \quad D\big(f(x_i)\, t_i\big) + \big(f(x_i)\, y_i\, z_i\big) + \dfrac{1}{6} D^{(3)}\big(f(x_i)\, y_i\big) = 0 \end{cases}$$

dove s' è posto:

$$\text{(1)} \qquad D\big(f(x_i)\, y_i\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} y_{r+1}$$

$$\text{(2)} \qquad D\big(f(x_i)\, z_i\big) = \frac{\partial f}{\partial x_1} z_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_{r+1}} z_{r+1} ,$$

ed inoltre con $D^{(2)}$ [e $D^{(3)}$] è indicato il quadrato [cubo] simbolico, ed infine con $D_2\big(f(x_i)\, y_i\, z_j\big)$ è indicato il prodotto simbolico delle forme (1) e (2). Tale sistema si ottiene sostituendo nella forma $f(x_i)$ alle variabili complesse x_i le variabili quadripotenziali:

$$\text{(3)} \qquad \xi_i = x_i\, u_1 + y_i\, u_2 + z_i\, u_3 + t_i\, u_4 ,$$

eseguendo i calcoli, tenendo conto della tabella di moltiplicazione delle unità dell'algebra dei numeri quadripotenziali:

(4)

	u_1	u_2	u_3	u_4
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4
u_2	u_2	u_3	u_4	0
u_3	u_3	u_4	0	0
u_4	u_4	0	0	0

,

ed eguagliando a zero le quattro forme a coefficienti di u_1, u_2, u_3 ed u_4.

Nell' S_{4r+3}, in cui si considera il sistema di coordinate

$$(x_1, y_1, z_1, t_1, \ldots, x_{r+1}, y_{r+1}, z_{r+1}, t_{r+1}) \quad (5)$$,

il sistema (T) rappresenta la varietà V_{4r-1} intersezione di quattro ipersuperficie di ordine n, varietà che dà la prima rappresentazione della ipersuperficie quadripotenziale di equazione:

$$f(\xi_i) = 0 \quad (6)$$,

ottenuta dalla data nell' S_r complesso *prolungandola nel campo quadripotenziale.* Tale sistema risponde al *caso semplice* di un sistema, più generale, studiato in una memoria precedente, dimostrando le proprietà generali della I^a rappresentazione complessa di una ipersuperficie quadripotenziale (1). *Lo studio del caso semplice ha particolare importanza perchè legato all' ente algebrico* ∞^{r-1} *rappresentato in* S_r *dall' equazione* $f(x_i) = 0$.

Le proprietà nel *caso generale* per una ipersuperficie *dell'* S_r *m-potenziale* sono già state date, per m intero qualunque. Il *caso speciale* è stato, invece, trattato solo per $m = 2$ ed $m = 3$, in aggiunta alla trattazione del caso generale. Qui si riprende la trattazione nel caso speciale per $m = 4$. Si osservi che le prime due equazioni (I) e (II) dànno il sistema relativo al caso semplice per $m = 2$ (cioè per l' S_r bi-duale o bi-potenziale); invece le tre equazioni (I), (II) e (III) dànno il sistema relativo al caso semplice per $m = 3$ (cioè per l' S_r tripotenziale). Ciò deriva dalla proprietà che *l' algebra dei numeri m-potenziali ammette sempre una sotto algebra equivalente all' algebra dei numeri* ($m - 1$) - potenziali).

---

(1) N. Spampinato, *La 1^a rappresentazione complessa della ipersuperficie generale dell'* S_r *quadripotenziale.* Ricerche di Matematica dell' Istituto di Matematica dell' Università di Napoli, vol. III.

1. Prime proprietà della V_{4r-1}, di equazioni (T), dell' S_{4r+3}.

Le quattro ipersuperficie dell' S_{4r+3} rappresentate, singolarmente, dalle quattro equazioni (T), che con la loro intersezione dànno la V_{4r-1} godono delle seguenti proprietà:

La (I) *è un ipercono avente per vertice l'* S'_{3r+2} *di equazioni:*

$$(7) \qquad x_1 = \ldots = x_{r+1} = 0$$

opposto all' $S_r'(x_i)$ di equazioni:

$$(8) \quad y_1 = \ldots = y_{r+1} = z_1 = \ldots = z_{r+1} = t_1 = \ldots = t_{r+1} = 0.$$

Tale ipercono si ottiene proiettando dal vertice la ipersuperficie V'_{r-1} di S_r' avente la stessa equazione (I).

La (II) *è un ipercono avente per vertice l'* S''_{2r+1} *di equazioni:*

$$(9) \qquad x_1 = \ldots = x_{r+1} = \ldots = y_1 = \ldots = y_{r+1} = 0.$$

Tale ipercono si ottiene proiettando dal vertice la ipersuperficie dell' iperspazio S_{2r+1} opposto avente la stessa equazione (II).

La (III) *è un ipercono avente per vertice l'* S_r^* *di equazioni:*

$$(10) \quad x_1 = \ldots = x_{r+1} = y_1 = \ldots = y_{r+1} = z_1 = \ldots = z_{r+1} = 0.$$

Tale ipercono si ottiene proiettando dal vertice la ipersuperficie dell' S_{3r+2} opposto avente la stessa equazione (III).

La (IV) *è un' ipersuperficie che, in generale, non è un ipercono.*

Si noti ora che se il punto $P'(x_i')$ di $S_r'(x_i)$ di equazioni (8) appartiene alla V'_{r-1} di equazione (I), tale punto appartiene alla varietà V_{4r-1} perchè, per le (8), soddisfa pure alle altre tre equazioni [perchè ogni loro termine contiene una almeno delle variabili y_i, z_i, t_i]. Si ha dunque:

I) *La* V_{4r-1} *contiene sempre la ipersuperficie* V'_{r-1} *di* $S_r'(x_i)$ *di equazione* (I).

L' S_r' si trova, quindi, in posizione particolare rispetto alla V_{4r-1}, perchè la seca in una varietà di dimensione $r-1$. Ciò avviene perchè detto S_r' di equazioni (8) appartiene alle tre ipersuperficie (II), (III) e (IV), e quindi la V'_{r-1} intersezione di S_r con il primo ipercono appartiene all' intera intersezione V_{4r-1} delle quattro ipersuperficie.

Fissato un punto P' di V'_{r-1} resta determinato un $S'_{3r+3} = P' S'_{3r+2}$ generatore del primo ipercono che secherà le altre tre ipersuperficie in una varietà generatrice della V_{4r-1} contenente il punto P'. *In corrispondenza agli ∞^{r-1} punti della V'_{r-1}, data in $S'_r(x_i)$, si avranno ∞^{r-1} V_{3r} generatrici della V_{4r-1}, distribuite negli ∞^{r-1} iperspazi generatori del primo ipercono.*

Per determinare le equazioni di tale varietà generatrice, nell' S'_{3r+3} ambiente, si considerino le equazioni parametriche di questo $S'_{3r+3} = P'S'_{3r+2}$ congiungente il punto generico, e quindi semplice

$$(11) \qquad P'(x_1', 0, \ldots, 0;\ x_2', 0, \ldots, 0;\ \ldots;\ x'_{r+1}, 0, \ldots, 0),$$

della V'_{r-1} di equazione (I), con l' S'_{3r+2} di equazioni (7). Esse sono:

$$(12) \qquad x_i = \rho x_i', \quad y_i = \lambda_i, \quad z_i = \mu_i, \quad t_i = \sigma_i.$$

I parametri $(\rho, \lambda_i, \mu_i, \sigma_i)$ si assumeranno come coordinate del punto variabile in detto S'_{3r+3}. Sostituendo le (12) nelle tre equazioni (II), (III) e (IV) si ha il sistema (indicando con n il grado della $f(x_i)$:

$$(13) \begin{cases} (\mathrm{II}_1) & \rho^{n-1}\, D\big(f(x_i')\, y_i\big) = 0 \\ (\mathrm{III}_1) & \rho^{n-1}\, D\big(f(x_i')\, z_i\big) + \dfrac{\rho^{n-2}}{2}\, D^{(2)}\big(f(x_i')\, y_i\big) = 0 \\ (\mathrm{IV}) & \rho^{n-1}\, D\big(f(x_i')\, t_i\big) + \rho^{n-2}\, D_2\big(f(x_i')\, y_i\, z_j\big) + \dfrac{\rho^{n-3}}{6}\, D^{(3)}\big(f(x_i')y_i\big) = 0 \end{cases}$$

conservando al posto delle λ_i, μ_i e t_i le y_i, z_i e t_i, per le (12).

Il sistema (13) rappresenta l' intersezione della V_{4r-1} con l' S'_{3r+3} generatore del primo ipercono. Da ciascuna di queste equazioni si stacca la equazione $\rho = 0$ contata $n-1$ volte per la prima, $n-2$ volte per la seconda, ed $n-3$ volte per la terza. Ma l' equazione $\rho = 0$ rappresenta nell' S'_{3r+3} *l' iperpiano* S'_{3r+2} e questo è di equazioni (7), come iperspazio dell' S_{4r+3}, vertice del primo ipercono.

Tale vertice si stacca, quindi, dalla intersezione contato $(n-1)(n-2)(n-3)$ *volte*. Resta la varietà V_{3r} *generatrice* cercata di equazioni [nelle coordinate $(\rho, \lambda_i, \mu_i, \sigma_i)$; ovvero (ρ, y_i, z_i, t_i)]:

$$(14) \begin{cases} (\mathrm{II}_2) & D\big(f(x_i')\, y_i\big) = 0 \\ (\mathrm{III}_2) & \rho\, D\big(f(x_i')\, z_i\big) + \dfrac{1}{2}\, D^{(2)}\big(f(x_i')\, y_i\big) = 0. \\ (\mathrm{IV}_2) & \rho^2\, D\big(f(x_i')\, t_i\big) + \rho\, D_2\big(f(x_i')\, y_i\, z_j\big) + \dfrac{1}{6}\, D^{(3)}\big(f(x_i')\, y_i\big) = 0. \end{cases}$$

Si ha perciò :

II) *La* V_{4r-1} *è costituita da* ∞^{r-1} *varietà generatrici* V_{3r} *uscenti dagli* ∞^{r-1} *punti* P' *della* V'_{r-1} *di* $S_r'(x_i)$ *che la determina. Quella determinata da un tal generico punto* $P'(x_i')$ *appartiene all'* $S'_{3r+3} = P'S'_{3r+2}$ *generatore del primo ipercono ed ha, in tale iperspazio, le equazioni* (14), *nelle incognite* (ρ, y_i, z_i, t_i). *Il suo ordine è* 6.

Si noti che il vertice S_{3r+2} del primo ipercono [staccato dalla varietà intersezione contato $(n-1)$ $(n-2)$ $(n-3)$ volte] dato che appartiene al primo ipercono [con la multiplicità n] apparterrà alla V_{4r-1} totale intersezione e si ha, perciò:

III) *Il vertice* S'_{3r+2} *dell' ipercono* (I) *appartiene sempre alla* V_{4r-1}. *Nel caso generico avrà la multiplicità* $n(n-1)$ $(n-2)$ $(n-3)$.

2. Proprietà delle V^6_{3r} generatrici della V_{4r-1}.

Nell' $S'_{3r+3} = P'S'_{3r+2}$, ambiente della varietà generatrice V^6_{3r}, di equazioni (14), nel sistema di coordinate (ρ, y_i, z_i, t_i), l' equazione di S'_{3r+2} è $\rho = 0$, perchè per $\rho = 0$ le prime $r+1$ equazioni (12) dànno le $r+1$ equazioni (7) di tale S'_{3r+2} (vertice del primo ipercono).

Ora il sistema (14) per $\rho = 0$ dà il sistema:

$$(15) \qquad \begin{cases} D\left(f(x_i')\, y_i\right) = 0 \\ D^{(2)}\left(f(x_i')\, y_i\right) = 0 \\ D^{(3)}\left(f(x_i')\, y_i\right) = 0. \end{cases}$$

Questo sistema nell' S'_{3r+2} di equazione $\rho = 0$ [considerando il sistema di coordinate (y_i, z_i, t_i)] rappresenterà la V^6_{3r-1} intersezione della V^6_{3r} generatrice considerata con detto S'_{3r+2}. Nel sistema (15) intervengono solo le variabili y_i (di primo grado nella prima, secondo grado nella seconda e terzo grado nella terza) e quindi la V^6_{3r-1} rappresentata da tale sistema è un ipercono avente per vertice l' iperspazio rappresentato dalle equazioni $y_i = 0$, ed ottenibile proiettando, da tale vertice, la V^6_{r-3} rappresentata dallo stesso sistema (15) nell' $S_r(y_i)$, dove si considerano le coordinate $(y_1, \ldots, y_{r+1})$. Il vertice è l' iperspazio opposto di equazioni $y_i = 0$, cioè l' S_{2r+1} (z_i, t_i).

Si noti inoltre che nell' $S_r(y_i)$, considerando la ipersuperficie $f(y_i) = 0$, proiettiva alla data $f(x_i) = 0$ in $S_r(x_i)$, le tre equazioni (15) dànno le equazioni di tre ipersuperficie polari del punto Q' di coordinate $y_i = x_i'$ rispetto alla ipersuperficie $f(y_i) = 0$ suddetta. Ne segue che la V^6_{r-3} rappresentata in $S_r(y_i)$ dal sistema (15) è l' intersezione di tali tre ipersu-

perficie polari. La prima è l'equazione dell'iperpiano tangente nel punto Q', punto che appartiene alla $f(y_i) = 0$ perchè, per ipotesi, il punto $P'(x_i')$ appartiene alla $f(x_i) = 0$. Le altre due sono la $(n-2)$-ma e la $(n-3)$-ma polare di Q' rispetto alla $f(y_i) = 0$. Raccogliendo si ha:

I) *La* V^6_{3r} *generatrice della* V_{4r-1} *appartenente all'* $S_{3r+3} = P'S'_{3r+2}$ *generatore del primo ipercono, è secata dal vertice* S'_{3r+2} *di detto ipercono in un ipercono* V^6_{3r-1}, *avente per vertice l'* S_{2r+1} (z_i, t_i), *ed ottenuto proiettando da tale vertice la* V^6_{r-3}, *di* $S_3(y_i)$, *intersezione delle tre ipersuperficie* $(n-1)$-ma, $(n-2)$-ma *ed* $(n-3)$-ma *polare del punto* Q' [*avente le stesse coordinate di* P'] *rispetto alla ipersuperficie* $f(y_i) = 0$ *di* $S_3(y)$, *corrispondente della* V^n_{r-1} *data in* $S_3'(x_i)$ *nella proiettività* $x_i = y_i$.

Se indichiamo con M' ed N* i due punti di $S_r(z_i)$ ed $S_3^*(t_i)$ aventi le stesse coordinate di P' in $S_r(x_i)$, e di Q' in $S_r(y_i)$, l' $S_3' = P'\,Q'\,M'\,N^*$ ha l'equazioni parametriche

$$(16) \qquad x_i = \rho x_i', \quad y_i = \lambda x_i', \quad z_i = \mu x_i', \quad t_i = \sigma x_i'.$$

Sostituendo nelle (T) si ricava che [nell'ipotesi che sia $f(x_i') = 0$], restano soddisfatte qualunque siano ρ, λ, μ, σ, si ha perciò:

II) *La* V^6_{3r} *generatrice della* V_{4r-1} *appartenente all'* $S'_{3r+3} = P'S'_{3r+2}$ *generatore del primo ipercono contiene tutto l'* $S_3' = P'Q'M'N^*$ *congiungente il punto* P' *della ipersuperficie data in* $S_3'(x_i)$ *con i punti* Q' M' N* *di* $S_r(y_i)$, $S_r(z_i)$ *ed* $S_r^*(t_i)$ *aventi le stesse coordinate di* P'.

Si noti che P', Q', M' ed N* si corrispondono nelle proiettività fra tali quattro S_r di equazioni

$$(17) \qquad x_i = y_i = z_i = t_i.$$

e quindi *l'* S_3 *che li congiunge è un* S_3 *generatore della varietà* w_r *determinata da dette proiettività, contenuta nella varietà di Segre costituita dagli* S_3 *congiungenti le quaterne di punti di tali quattro* S_r *dell'* S_{4r+3}.

Si noti che $S_3^*(t_i)$ è l'*asse* della congruenza (S_3) che dà in S_{4r+3} la prima rappresentazione complessa dell' S_r quadripotenziale, perchè l' S_3 immagine del punto quadripotenziale di coordinate (ξ_i'), si ottiene congiungendo i quattro punti di S_{4r+3} aventi per coordinate le quattro righe della matrice, a $4r+4$ colonne, composta con le $r+1$ matrici quadrate:

$$(18) \qquad \left\| \begin{matrix} x_i' & y_i' & z_i' & t_i' \\ 0 & x_i' & y_i' & z_i' \\ 0 & 0 & x_i' & y_i' \\ 0 & 0 & 0 & x_i' \end{matrix} \right\| \qquad (i = 1, \ldots, r+1)$$

che rappresentano gli $r+1$ numeri quadripotenziali (3), messi sotto forma di matrici quadrate. Dovendo essere tale matrice composta con le matrici (18) di caratteristica massima, gli $r+1$ numeri complessi x_i non saranno tutti nulli, ed il quarto punto, rispondente alla quarta riga, ha le coordinate (5) con le condizioni

$$x_i = y_i = z_i = 0 \tag{19}$$

che sono le equazioni di $S_r^*(t_i)$. Questo è dunque l' asse della congruenza a cui si appoggiano tutti gli S_3 della congruenza.

Si osservi, in particolare, che l' $S_3' = P'Q'M'N^*$ di cui ci siamo occupati è l' S_3 della congruenza (S_3) immagine del punto ($x_i'\,u_1$) dell' S_r quadripotenziale *avente le coordinate multipli del modulo* u_1 dell' algebra A dei numeri quadripotenziali. Infatti in tal caso le $r+1$ matrici (18) sono:

$$\begin{Vmatrix} x_i' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_i' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_i' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i' \end{Vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, r+1) \tag{20}$$

e quindi la matrice composta con queste matrici ha per righe le coordinate dei quattro punti P′, Q′, M′ e N*.

Si noti anche che nella matrice del tipo (18) la prima riga determina le altre tre e quindi la prima riga della matrice composta con le matrici (18) dà le coordinate di un punto (5) che determina gli altri tre che insieme al primo determinano l' S_3 della congruenza (S_3) passante per il punto (5). In particolare si ha:

III) *L'* $S_3' = P'\,Q'\,M'\,N^*$ *congiungente i quattro punti aventi per coordinate le quattro righe della matrice composta con le matrici* (20) *è l'* S_3 *della congruenza* (S_3) *passante per il punto*

$$P'(x_1', 0, 0, 0\,; \ldots ;\, x'_{r+1}, 0, 0, 0) \tag{21}$$

della ipersuperficie data in $S_r'(x_i)$, *e rappresenta il punto complesso dell'* S_r *quadripotenziale* ($x_i'\,u_1$). *Il punto* N* *è il punto di appoggio di detto* S_3' *all' asse* $S_3^*(t_i)$ *della congruenza* (S_3).

Si noti esplicitamente che il punto dell' S_r quadripotenziale ($x_i'\,u_1$) ha le coordinate ottenute dalla coordinata (x_i') del punto P′ fissato in $S_r'(x_i)$ moltiplicate per il modulo u_1 di A. I punti ($x_i\,u_1$) dell' S_r quadripotenziale costituiscono un S_r proiettivo complesso, perchè in corrispondenza biunivoca senza eccezione con i punti (x_i) dell' S_r numerico complesso.

Ne segue che

IV) *Gli* S_3 *della congruenza del tipo* $S_3' = P' Q' M' N^*$ [*con* P' *variabile iu* $S_r'(x_i)$ *e* Q', M' *ed* N^* *corrispondenti di* P' *nelle proiettività* (17) *e variabili in* $S_r(y_i)$, $S_r(z_i)$ *ed* $S_r^*(t_i)$] *generatori della varietà* w_r *costituiscono un* S_r *proiettivo complesso immagine dell'* S_r *complesso contenuto nell'* S_r *quadripotenziale.*

Tenendo conto della proprietà II) si ha che :

V) *La* V^6_{3r} *generatrice della* V_{4r-1} *appartenente all'* S'_{3r+3} *generatore del primo ipercono passante per il punto* P' *di* $S_r'(x_i)$ *contiene l'* S_3' *della congruenza* (S_3) *determinato da* P' *immagine del punto* $(x_i' u_1)$ *dell'* S_r *complesso contenuto nell'* S_r *quadripotenziale ed appartenente alla varietà* w_r *determinata dalle proiettività* (17).

Sulle condizioni di razionalità per una superficie tripotenziale

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 5 marzo 1955)

Sunto. — Facendo sèguito ad una memoria [1]) relativa all'inizio dello studio di una superficie unirazionale dell' S_3 supercomplesso, [relativo alle algebre dei *numeri n-duali*] si inizia in questa nota lo stesso argomento relativo all'algebra dei *numeri tripotenziali,* per determinare le *condizioni necessarie e sufficienti affinchè una superficie unirazionale tripotenziale risulti razionale,* proprietà di cui godono, per un teorema fondamentale del Castelnuovo, tutte le superficie unirazionali complesse.

1. *Le superficie unirazionali dell'* S_3 *tripotenziale.*

Nell' S_3 tripotenziale, in cui si suppone introdotto il sistema $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ di coordinate omogenee tripotenziali, consideriamo la superficie tripotenziale di equazioni parametriche

$$\mu_j = F_j(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \qquad (j=1, \ldots, 4) \tag{1}$$

con i tre parametri omogenei η_1, η_2, η_3 tripotenziali, e con le F_j forme tripotenziali, linearmente indipendenti, dello stesso grado. Al punto tripotenziale del piano tripotenziale S_2 (η_j), di coordinate generiche (η_i), corrisponde un punto M (μ_j) dell' S_3 tripotenziale [la quaterna $(F_j(\eta_i))$ risulta di caratteristica massima]. Al punto M (μ_j), che varierà nella superficie tripotenziale W_2 di equazioni (1), corrisponde, viceversa, un gruppo di $k \geq 1$ punti del piano tripotenziale S_2 (η_i), determinandosi così una corrispondenza algebrica $(1,k)$ fra la W_2 e il piano S_2 (η_i). Nel caso $k=1$ la W_2 si dirà *razionale;* nel caso $k>1$ la W_2 si dirà unirazionale. A quali conzioni devono soddisfare le forme $F_j(\eta_i)$ perchè la W_2 risulti razionale, cioè sia possibile dare della W_2 una rappresentazione parametrica per la quale risulti $k=1$? Nel caso delle superficie unirazionali dell' S_3 *complesso,* tale possibilità si verifica sempre, per un teorema fondamentale del Castel-

---

[1]) Spampinato N. — *Il teorema fondamentale sulle condizioni di razionalità.* « Giornale di Matematiche » di Battaglini, Vol. LXXXII (2ª della 5ª serie), 1953-54. Ed. Pellerano — Del Gaudio, Napoli.

NUOVO. Ma appena si passa ai numeri supercomplessi tale possibilità si ha in casi particolari. Per le superficie unirazionali biduali, triduali, ed in generale, n-duali, ho già dato il teorema fondamentale per la razionalità delle superficie unirazionali. Si tratta ora di dare un analogo teorema per il caso tripotenziale.

2. *La rappresentazione complessa della superficie tripotenziale* W_2 *nell'* S_8 *complesso.*

Indichiamo con u, v, w le unità dell' algebra A dei numeri tripotenziali, con la tabella di moltiplicazione

(2)

	u	v	w
u	u	v	w
v	v	w	0
w	w	0	0

Posto

$$(3) \quad \begin{cases} \mu_j = x_j u + y_j v + z_j w & (j = 1, \ldots, 4) \\ \eta_i = \rho_i u + \sigma_i v + \pi_i w & (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$(4) \quad F_j = f_j(\rho_i) u + g_j(\rho_i, \sigma_i) v + h_j(\rho_i, \sigma_i, \pi_i) w$$

con f_j, g_j, h_j forme dello stesso grado le $f_j(\rho_i)$ di tipo generale, le $g_j(\rho_i, \sigma_i)$, $h_j(\rho_i, \sigma_i, \pi_i)$ risultano di tipi particolari, conseguenza del tipo particolare della tabella di moltiplicazione (2), che mettono in evidenza che le $F_j(\eta_i)$ risultano *totalmente derivabili* rispetto a ciascuna delle tre variabili η_i.

Le quattro equazioni tripotenziali (1) della W_2, equivalgono, per le posizioni (3) e (4), alle dodici equazioni complesse

$$(5) \quad \begin{cases} x_j = f_j(\rho_i) \\ y_j = g_j(\rho_i, \sigma_i) & (j = 1, \ldots, 4). \\ z = h_j(\rho_i, \sigma_i, \pi_i) \end{cases}$$

Nell' S_{11} complesso, il punto tripotenziale $M(\mu_j)$ è rappresentato dal piano, di una congruenza (S_2), congiungente i tre punti

$$(6) \quad P(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots, x_4, y_4, z_4)$$

$$(7) \qquad Q\,(0\;,\,x_1\,,\,y_1\,,\ldots\ldots,0\;,\,x_4\,,\,y_4)$$

$$(8) \qquad R\,(0\;,\,0\;,\,x_1\,,\ldots\ldots,0\;,\,0\;,\,x_4)\,,$$

aventi per coordinate le tre righe della matrice a 12 colonne composta con le quattro matrici che rappresentano, sotto forma di matrici quadrate del terzo ordine, i quattro numeri tripotenziali $\mu_1, \ldots, \mu_4$. In detto S_{11}, ambiente della congruenza (S_2) che dà la Iª rappresentazione complessa dell' S_3 tripotenziale, il sistema (5), equivalente alle equazioni parametriche (1) della W_2 tripotenziale, rappresenta una varietà unirazionale V_8, considerando i nove parametri complessi ρ_j, σ_i, π_i, rispondenti, per le seconde delle (3) ai tre parametri tripotenziali η_i. Tale V_8 sarà riempita dagli ∞^6 piani di (S_2) immagini dei punti tripotenziali della superficie tripotenziale W_2 (di dimensione tripotenziale 2 e, quindi, di dimensione complessa 6). Sicchè:

Lo studio della superficie unirazionale W_2 *dell'* S_3 *tripotenziale, di equazioni parametriche* (1), *equivale allo studio della varietà unirazionale* V_8 *dell'* S_{11}, *di equazioni parametriche* (5), *composta con* ∞^6 *piani della congruenza* (S_2) *che dà la* Iª *rappresentazione complessa dell'* S_3 *tripotenziale.*

3. *Razionalità della superficie descritta dal punto* R.

Le prime quattro equazioni (5)

$$(5') \qquad x_j = f_j\,(\rho_1\,,\,\rho_2\,,\,\rho_3) \qquad (j = 1\,,\ldots,4)$$

rappresentano nell' S_3''' dove varia il punto R di coordinate (8) una superficie unirazionale, e quindi (per il teorema di Castelnuovo su ricordato) razionale. Diciamola V_2'''. Al punto $R'\,(\rho'_i)$ di $S_2\,(\rho_i)$, in cui non si annullano le quattro forme $f_j\,(\rho_i)$, corrisponde un sol punto R della superficie V_2''', viceversa al punto R della V_2''' corrispondono uno o più punti del piano $S_2\,(\rho_i)$ secondo che le quattro equazioni nelle ρ_i:

$$(9) \qquad f_j\,(\rho_i) = c f_j\,(\rho'_i)$$

con $c \neq 0$, non ammettono altre soluzioni, oltre quella delle ρ_i proporzionali alle ρ'_i coordinate di R'. *Nel primo caso* le (5') sono atte a mettere in evidenza la razionalità della V_2'''. *Nel secondo caso* sarà possibile sostituire alle $f_j\,(\rho_i)$ nelle (5') altre forme $f_j\,(\lambda_i)$ in modo da rappresentare la V_2''' birazionalmente nel piano $S_2\,(\lambda_i)$. In tal caso se ad un punto R di di V_2''' corrispondono nel piano $S_2\,(\rho_i)$ i k punti $R_1, R_2, \ldots, R_k$ e nel piano $S_2\,(\lambda_i)$ il punto L, fra i due piani $S\,(\rho_i)$ e $S_2\,(\lambda_i)$ si ha una corri-

spondenza $(1,k)$ che fa corrispondere al punto L i k punti $R_1, \ldots, R_k$ e ad un punto di questo gruppo il punto L. Siano

$$\lambda_i = p_i(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \tag{10}$$

$$\rho_i = q_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \tag{11}$$

le equazioni di detta corrispondenza operante, rispettivamente, nel piano $S_2(\rho_i)$ e nel piano $S_2(\lambda_i)$. Ne segue *che le p_i sono funzioni ad un valore delle ρ_s, e le q_i sono funzioni a k valori delle λ_s*. Posto, per le (11):

$$f_j(\rho_i) = f_j(q_i(\lambda_s)) = f_j^*(\lambda_i) \,, \tag{12}$$

le equazioni

$$x_j = f_j^*(\lambda_i) \tag{13}$$

rappresentano la V_2''' con i nuovi parametri λ_i, dandone la *rappresentazione birazionale* nel piano $S_2(\lambda_i)$. Si ha intanto che:

I) *La superficie* V_2''' *nell'* S_3''', *dove varia il punto* R, *avente per equazioni parametriche* (5') *è razionale. La* V_2''' *è rappresentata birazionalmente o dalle* (5') *nel piano* $S_2(\rho_i)$ (I° caso), *o dalle* (13) *nel piano* $S_2(\lambda_i)$, *in corrispondenza unirazionale con* $S_2(\rho_i)$ *mediante le equazioni* (10) e (11). (II° caso).

4. *Razionalità della* V_8 *nel caso che la* W_2 *sia il prolungamento nel campo tripotenziale di una superficie razionale complessa.*

Nel caso che le forme tripotenziali $F_j(\eta_i)$ sono ottenute prolungando nel campo tripotenziale le tre forme complesse $f_j(\rho_i)$, cioè nel caso che f e $F_j(\eta_i)$ siano funzioni tripotenziali *semplici*, le funzioni g e h a coefficienti delle due unità v e w nelle (4) che danno le espressioni esplicite delle F_j, sono di tipo particolare, e precisamente del tipo:

$$g_j(\rho_i, \sigma_i) = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \rho_i} \sigma_i \tag{14}$$

$$h_j(\rho_i, \sigma_i, \pi_i) = \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial \rho_i} \pi_i + \frac{1}{2} \sum_{i,s} \frac{\partial^2 f_j}{\partial \rho_i \, \partial \rho_s} \sigma_i \sigma_s \tag{15}$$

Facciamo vedere intanto che in questo caso particolare la V_8 risulta razionale. Infatti se le (5') presentano *il primo caso*, cioè sono atte a mettere in evidenza la razionalità della V_2''', determinate le formole inverse

delle (5′), che danno le ρ_i con funzioni razionali intere delle x_j. Sostituendo questi valori delle ρ_i nelle quattro equazioni

$$(5'') \qquad y_j = g_j(\rho_i, \sigma_i) \qquad (j = 1, \ldots, 4)$$

del sistema (5), vengono eliminate le incognite ρ_i, e nei secondi membri restano le incognite σ_i al primo grado (per le (14)) e quindi si possono ricavare le σ_i che risulteranno funzioni razionali delle x_j ed y_j. Sostituendo i valori delle ρ_i e σ_i così calcolati in funzione x_j e y_j, nelle quattro equazioni

$$(5''') \qquad z_j = h_j(\rho_i, \sigma_i, \pi_i) \qquad (j = 1, \ldots, 4)$$

del sistema (5) vengono eliminate nei secondi membri le incognite ρ_i e σ_i, e restano le incognite π_i al primo grado (per le (15)) e quindi si potranno risolvere ricavando le π_i che risulteranno funzioni razionali delle x_j, y_j e z_j.

Nel *secondo caso*, ricordando che la V_2''' si rappresenta con le (13) i nuovi parametri λ_i da sostituire ai parametri ρ_i mediante le relazioni (11), posto, in analogia alle (12),

$$(16) \qquad g_j(\rho_i, \sigma_i) = g_j(q_i(\lambda_s), \sigma_i) = g_j^*(\lambda_i, \sigma_i)$$

$$(17) \qquad h_j(\rho_i, \sigma_i, \pi_i) = h_j(q_i(\lambda_s), \sigma_i, \pi_i) = h_j^*(\lambda_i, \sigma_i, \pi_i),$$

il sistema (5) si è trasformato nel sistema

$$(5^*) \qquad \begin{cases} x_j = f_j^*(\lambda_i) \\ y_j = g_j(\lambda_i, \sigma_i) \\ z_j = h_j(\lambda_i, \sigma_i, \pi_i) \end{cases}$$

che si presenta nelle condizioni in cui si trovava il sistema (5) nel primo caso e quindi invertibile razionalmente. La V_8 considerata rappresentata dalle (5*), anzichè dalla (5), risulta, pertanto una varietà razionale dell'S_{11} Si ha perciò:

II) *Se la superficie tripotenziale* W_2 *è ottenuta prolungando nel campo tripotenziale una superficie complessa unirazionale* (*e quindi razionale*), *la varietà* V_8 *dell'* S_{11} *che rappresenta tale* W_2 *tripotenziale è razionale.*

Nota. Ora si domanda: nel caso qui considerato, in cui le funzioni tripotenziali razionali intere $F_j(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ delle (1) sono *semplici*, la superficie unirazionale tripotenziale W_2 risulta razionale? La risposta è affermativa, si ha, cioè, un primo caso (quello semplice) in cui vale il teorema di Castelnuovo per le superficie unirazionali complesse. Di tale argomento ci occuperemo nel n° seguente.

5. *Validità del teorema di* CASTELNUOVO *per le superficie* W_2 *unirazionali semplici.*

Nel *caso semplice* considerato nel n° precedente le equazioni (1) della W_2 sono ottenute prolungando nel campo tripotenziale le equazioni (5′) della superficie razionale V_2''', e precisamente sostituendo nelle (5′) alle variabili e parametri complessi x_j, ρ_i le variabili e parametri tripotenziali μ_j, η_i rispettivamente. Nel caso in cui le (5′) sono atte a mettere in evidenza la razionalità della V_2''', cioè nel caso che le (5′) danno la rappresentazione birazionale della V_2''' nel piano $S_2(\rho_i)$, le (5′) saranno razionalmente invertibili in relazioni del tipo

$$\rho_i = k_i(x_1, \ldots, x_4) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{18}$$

Ne segue che con le stesse operazioni con cui da (5′) si ricavano le (18), dalle (1) si ricavano le relazioni tripotenziali

$$\eta_i = K_i(\mu_1, \ldots, \mu_4) \tag{19}$$

dove le $K_i(\mu_j)$ sono le forme ottenute prolungando nel campo tripotenziale le forme complesse $k_i(x_j)$. Le (19) e le (1) mettono in evidenza che la W_2 di equazioni parametriche (1) è trasformata birazionale del piano tripotenziale $S_2(\eta_i)$, cioè che ha la W_2 è razionale.

Nel caso invece che le (5′) non sono atte a mettere in evidenza la razionalità della V_2''' si dovranno dare le equazioui parametriche di questa superficie nella forma (13), ottenute tenendo conto della trasformazione $(1, k)$ tra i piani $S_2(\rho_i)$ e $S_2(\lambda_i)$ di equazioni (10) e (11). In questo caso alle forme $f_j(\rho_i)$ sono state sostituite le forme $f_j^*(\lambda_i)$ ottenute mediante le (11); *con queste stesse relazioni* (11) dalle forme $g_j(\rho_i, \sigma_i)$ ed $h_j(\rho_i, \sigma_i, \pi_i)$ date dalle (14) e (15), si ricavano le forme

$$g_j^*(\lambda_i, \sigma_i) = \sum_{s,i} \frac{\partial f_i^*}{\partial \lambda_s} \frac{\partial p_s}{\partial \rho_i} \sigma_i \tag{20}$$

$$h_j^*(\rho_i, \sigma_i, \pi_i) = \sum_{s,i} \frac{\partial f_j^*}{\partial \lambda_s} \frac{\partial p_s}{\partial \rho_i} \pi_i + \tag{21}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{sti} \left[\frac{\partial^2 f_j^*}{\partial \lambda_s \partial \lambda_t} \frac{\partial p_t}{\partial \rho_i} \frac{\partial p_s}{\partial \rho_i} \sigma_i + \frac{\partial f_j^*}{\partial \lambda_s} \frac{\partial^2 p_s}{\partial \rho_t \partial_i} \sigma_i \right]$$

dove le funzioni $p_i(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ sono date dalle (10) inverse delle (11).

Ciò premesso, posto, in analogia alle (4);

$$F_j^* = f_j(\lambda_i)u + g_j^*(\lambda_i, \sigma_i)v + h_j^*(\lambda_i, \sigma_i, \pi_i)w = F_j(\eta_i^*) \tag{22}$$

con

$$\eta_i^* = \lambda_i u + \sigma_i v + \pi_i w, \tag{23}$$

ne segue che la superficie tripotenziale W_2, di equazioni parametriche (1), risulta rappresentata anche con le equazioni parametriche, con i nuovi parametri η_i^*,

$$\mu_j = F_j^* (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \tag{1*}$$

con le forme a secondo membro date dalle (22). Le (1*) sono le equazioni tripotenziali che nel campo complesso danno il sistema (5*), per le (16) e (17) che qui abbiamo scritto esplicitamente nelle (20) e (21). Tenendo conto, come abbiamo già osservato, che il sistema (5*) risulta invertibile, razionalmente, perchè per le ipotesi fatte risultano invertibili le prime quattro equazioni, con le quali si ricavano le λ_i come funzioni razionali intere delle x_j; sostituendo nelle seconde quattro che sono lineari rispetto alle σ_i, si ricavano razionalmente le σ_i, ed, infine, dalle quattro, tenendo conto che risultano lineari rispetto alle π_i, si ricavano queste π_i. Ebbene, come nel caso precedente, considerando le inverse delle prime quattro $x_j = f_i^*(\lambda_i)$, supposte date dalle

$$\lambda_i = k_i (x_1, \ldots, x_4), \tag{24}$$

con le stesse operazioni si ricaveranno dalle (1*), nel campo tripotenziale, le inverse, che risulteranno eguali a quelle che si ottengono prolungando nel campo tripotenziale le (24), cioè dalle equazioni

$$\eta_i = K_i (\mu_1, \ldots, \mu_4) \tag{25}$$

dove le $K_i^* (\mu_j)$ sono forme ottenute prolungando nel campo tripotenziale le forme $k_i (x_j)$ a secondo membro nelle (24). Pertanto, anche in questo caso la superficie unirazionale tripotenziale W_2, di equazioni parametriche (1), risulta razionale e per metterne in evidenza la razionalità sono state scritte le sue equazioni parametriche nella forma (1*), che ammettono le inverse nella forma (25), sicchè le (1*) e le (25) determinano una trasformazione birazionale tripotenziale fra la superficie tripotenziale W_2 ed il piano tripotenziale S_2 (η_i^*). Si ha perciò:

III) *Ogni superficie tripotenziale* W_2 *ottenuta prolungando nel campo tripotenziale una superficie complessa unirazionale* (*e quindi razionale*), *è razionale.*

6. *Immagini delle sezioni piane della* W_2 *nel piano tripotenziale.*

Per il seguito è bene mettere in evidenza che ad una sezione piana della superficie tripotenziale W_2, di equazioni parametriche (1), con il piano tripotenziale di equazione:

$$m_1\,\mu_1 + \ldots + m_4\,\mu_4 = 0, \tag{26}$$

e quindi con la quaterna $(m_1, \ldots, m_4)$ di numeri tripotenziali di caratteristica massima, corrisponde, nel piano tripotenziale $S_2(\eta_i)$ la curva tripotenziale di equazione:

$$m_1\,F_1(\eta_i) + \ldots + m_4\,F_4(\eta_i) = 0\,. \tag{27}$$

Questa curva, al variare del piano tripotenziale (26), descrive un sistema lineare di dimensione tripotenziale 3. Questo sistema sarà *semplice* o *composto* secondo che ad un punto (η_i) del piano $S_2(\eta_i)$ risponde un punto, o $k > 1$ punti, della W_2, cioè secondo che fra la W_2 ed il piano $S_2(\eta_i)$ si ha una corrispondenza birazionale (1,1), o algebrica $(1,k)$ con $k > 1$. In questo secondo caso i gruppi di k punti del piano tripotenziale $S_2(\eta_i)$, rispondenti ai punti della W_2, costituiscono una *involuzione* di ordine k e di dimensione tripotenziale 2, e che indicheremo con J_k^2. Il sistema (27) risulta composto con detta J_k^2. In questo secondo caso $k > 1$ è stato possibile, [supposte sempre le funzioni tripotenziali $F_j(\eta_i)$ *semplici* (n° 4)], rappresentare la superficie tripotenziale W_2 con le nuovi equazioni parametriche (1*) del n° 6 con i nuovi parametri η_i^* date dalle (23), e quindi legati ai parametri η_i dati dalle (3) [tenendo conto del legame fra i coefficienti del modulo u a k valori cioè fra le ρ_i e le λ_i, legame dato dalle (11), che dànno le ρ_i come funzioni delle λ_i, o dalle (10) che dànno le λ_i come funzioni ad un valore delle ρ_i].

Quando la W_2 è rappresentata dalle (1*) alla sua sezione piana, fatta con il piano tripotenziale di equazione (26), corrisponde nel piano tripotenziale $S_2(\eta_i^*)$ la curva tripotenziale di equazione

$$m_1\,F_1^*(\eta_i^*) + \ldots + m_4\,F_4^*(\eta_i^*) = 0. \tag{28}$$

Questa curva, al variare del piano tripotenziale (26), descrive un sistema lineare *semplice*, perchè le forme $F_j^*(\eta_i)$ vengono a trovarsi nelle nelle condizioni in cui si trovano le $F_j(\eta_i)$ nel caso k 1, trattato prima.

Si osservi inoltre che dalle (23), per le (10), e dalle (3) per le (11), si ricavano le relazioni:

$$\eta_i^* = p_i(\rho_1, \rho_2, \rho_3)\,u + \sigma_i v + \pi_i w = p_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \tag{29}$$

$$\eta_i^* = q_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\,u + \sigma_i v + \pi_i w = q_i^*(\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3) \tag{30}$$

Le (29) e (30) determinano, fra i piani tripotenziali $S_2^*(\eta_i^*)$ ed $S_2(\eta_i)$, una corrispondenza $(1,k)$ che ad un punto (η_i) di S_2 fà corrispondere un punto (η_i^*) di S_2^* (perchè le funzioni p_i, e conseguentemente le p_i) son ad un valore; invece ad un punto (η_i^*) di S_2 corrispondono k punti di S_2 (perchè le q_i, e conseguentemente le q_i^*, son funzioni a k valori). Questi k punti costituiscono *un* gruppo della involuzione J_k^2 di cui sopra. Sicchè si viene a stabilire una corrispondenza (1,1) fra i punti del piano tripotenziale $S_2^*(\eta_i^*)$ ed i gruppi della involuzione J_k^2 del piano tripotenziale $S_2(\eta_i)$. Si ha perciò:

IV) *In corrispondenza alle due rappresentazioni parametriche della superficie tripotenziale* W_2 *date dalle* (1) *e* (1*) *si hanno, nei due piani tripotenziali* $S_2(\eta_i)$ *e* $S_2^*(\eta_i^*)$, *i due sistemi lineari di curve tripotenziali, di dimensione tripotenziale* 3, *immagini delle sezioni piane della* W_2. *Il secondo sistema è semplice. Il primo sistema è, invece, composto mediante una involuzione* J_k^2 *i cui gruppi sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano tripotenziale* $S^*_2(\eta_i^*)$.

Si osservi esplicitamente che *l' ordine della superficie tripotenziale* W_2 (dato dal numero di punti comuni alla W_2 e ad una retta tripotenziale dell' S_3 tripotenziale ambiente, data come intersezione di due piani tripotenziali) è uguale al numero di punti tripotenziali variabili comuni a due curve del sistema semplice di $S_2^*(\eta_i^*)$ immagini delle sezioni piane della W_2, cioè *è uguale al grado di detto sistema* (che è anche uguale al quoto del grado del sistema composto del piano $S_2(\eta_i)$ per l' ordine k della involuzione J_k^2).

Si noti ora che i sistemi tripotenziali (27) e (28), il primo semplice, il secondo composto, sono il prolungamento nel campo tripotenziale dei sistemi complessi di curve complesse di equazioni

$$a_1 f_1 (\rho_i) + \ldots + a_4 f_4 (\rho_i) = 0 \tag{31}$$

$$a_1 f_1^* (\lambda_i) + \ldots + a_4 f_4^* (\lambda_i) = 0 \tag{32}$$

nei piani complessi $S_2(\rho_i)$ e $S_2(\lambda_i)$ immagini delle sezioni piane della superficie V_2''' dell' S_3''' di equazioni paremetriche (5').

Ricordando che le (13) danno la rappresentazione *birazionale* della V_2''' nel piano $S_2(\lambda_i)$, anche qui si ha che il sistema (32) è semplice; invece il sistema (31) è composto con una involuzione del piano $S_2(\rho_i)$ costituita dagli ∞^2 gruppi di k punti ciascuno dei quali è corrispondente di un punto del piano $S_2(\lambda_i)$ nella corrispondenza $(1,k)$ di equazioni (11) e (12).

Ricerche chimiche su alcuni prodotti del Somma-Vesuvio

Nota della dott. **Silvia Restaino,** *presentata dal socio* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 5 marzo 1955)

Sunto. — Sono riportati i risultati delle analisi eseguite su i seguenti prodotti del Somma-Vesuvio: *a*) una cenere caduta durante l'eruzione del marzo 1944 a S. Valentino Torio; *b*) un pirosseno dell'eruzione del 1944, raccolto in località Badia di Cava dei Tirreni; *c*) un pirosseno di un proietto pirossenico del Monte Somma; *d*) una leucite del Monte Somma; *e*) una olivina della spiaggia vesuviana presso la Torre di Bassano. — Dei minerali sono state calcolate le formule.

Raccolgo in questa nota i risultati delle indagini analitiche da me eseguite su alcuni prodotti dell' attività del Somma-Vesuvio, di cui i campioni mi sono stati cortesemente forniti dal direttore dell' Istituto di Mineralogia dell' Università di Napoli prof. Scherillo, che ringrazio sentitamente anche per i consigli datimi nel corso dell' esecuzione del mio lavoro.

a) *Cenere caduta durante l' eruzione del marzo 1944 a S. Valentino Torio.*

La conflagrazione del marzo 1944, manifestatasi con un efflusso lavico rapido e con produzione di materiali piroclastici, ha spinto questi ultimi prodotti, a causa delle correnti atmosferiche, fino nelle Puglie, raggiungendo la cenere più fine anche l' Albania.

Mentre lo studio del materiale lavico è di notevole importanza per le osservazioni sul chimismo magmatico del nostro vulcano, non meno importante è lo studio del materiale piroclastico proiettato dal vulcano nelle diverse giornate e nelle diverse ore; ciò sia per i rapporti tra il materiale eiettato allo stato continuo e quello frammentario, sia per le questioni inerenti alla natura della cenere, alla sua composizione mineralogica, allo stato di ossidazione del ferro, alla provenienza della cenere stessa, se cioè coeva o antica, oppure mista.

Il materiale cinereo, da me analizzato, è stato raccolto a S. Valentino Torio. I metodi seguiti in questa e nelle successive analisi sono, in generale, quelli indicati da Hillebrand and Lundell (*Applied Inorganic Analysis.* John Wiley and Sons. Inc.; New-York, 1929).

L'analisi ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	48.10
Al_2O_3	18.68
Fe_2O_3	5.89
FeO	2.65
MnO	0.30
MgO	5.33
CaO	7.74
BaO	0.13
K_2O	5.92
Na_2O	2.70
P_2O_5	1.07
Cl	0.17
SO_3	0.27
H_2O	0.70
	99.65

Nelle tabelle seguenti riporto per confronto le analisi di alcune lave ceneri e di alcuni proietti emessi dal Vesuvio dal 1906 al 1944.

	A	B	C	D	E	F	G
SiO_2	47.80	48.00	47.96	48.16	48.05	47.43	47.24
TiO_2	0.38	0.38	0.40	1.00	1.00	0.50	0.50
ZrO_2	0.04	0.07	0.04	tr.	tr.	tr.	tr.
Al_2O_3	19.55	19.55	19.15	18.36	18.05	15.52	11.70
Fe_2O_3	2.80	2.79	3.08	4.74	4.31	5.30	6.41
FeO	5.89	5.67	5.64	4.38	4.90	5.17	4.84
MgO	3.70	4.03	4.37	3.48	3.84	5.23	7.54
CaO	8.46	8.46	9.04	8.75	9.58	11.54	14.22
BaO	0.25	0.22	0.18	0.33	0.42	0.20	0.20
K_2O	6.81	6.40	6.36	6.80	6.15	5.49	3.07
Na_2O	3.61	3.38	3.16	2.73	2.79	2.70	3.15
Cl	0.15	0.21	0.17	0.28	0.27	0.30	0.25
SO_3	0.04	0.07	0.06	0.09	0.04	0.09	0.03
P_2O_5	0.67	0.58	0.48	0.80	0.80	0.82	0.62
H_2O^-	0.02	—	—	—	0.04	0.04	0.09
H_2O^+	0.29	0.42	0.32	0.30	0.48	0.21	0.60
	100.46	100.23	100.41	100.20	100.72	100.54	100.46

A. Lava dell' autunno 1940 (media) (SCHERILLO: Ann. Oss. Ves., S. V, volume unico, pp. 169-83; 1949).

B. Lava del novembre 1941 (SCHERILLO: Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, S. IV, vol. XIII, p. 68; 1942-1945).

C. Lava del febbraio 1942 (SCHERILLO: Ibid.).

D. Lava del 19 marzo 1944 (SCHERILLO: Ann. Oss. Ves., S. V., volume unico, pp. 169-83; 1949).

E. Lava del 21 marzo 1944 (SCHERILLO: Ibid.).

F. Scoria del 22 marzo 1944 (SCHERILLO: Ibid.).

G. Scoria delle ultime esplosioni dell' eruzione del 1944 (SCHERILLO Ibid.).

	H	I	L	M	N	O	P
SiO_2	48.12	48.15	47.68	46.50	47.09	46.57	47.22
TiO_2	nd.	nd.	0.50	0.55	0.64	0.70	0.50
ZrO_2	nd.	nd.	0.05	0.03	tr.	0.02	tr.
Al_2O_3	19.08	18.44	18.85	16.38	15.34	15.08	19 45
Fe_2O_3	7.71	7.56	6.03	7.02	4.37	3.29	5.55
FeO	2.77	2.75	3.10	2.90	4.55	5.60	2.80
MnO	0.42	0.39	0.14	nd.	0.20	0.11	0.22
MgO	3.73	4.43	3.91	4.78	6.27	6.52	3.02
CaO	7.95	8.24	8.85	10.62	12.90	12.86	8.73
BaO	0.09	0.09	0.32	0.16	0.14	0.16	0.18
K_2O	6.40	5.83	6.14	5.75	3.89	4.15	6.08
Na_2O	2.53	2.87	3.44	2.67	2.91	2.81	3.63
Cl	—	—	0.19	0.50	0.15	0.27	0.25
SO_3	—	—	0.10	0.56	0.07	0.05	0.17
P_2O_5	0.85	0.74	0.64	0.64	0.54	0 60	0.70
H_2O^-	—	—	0.03	0.16	—	0.07	0.10
H_2O^+		—	0.58	1.31	0.77	1.28	1.27
	99.65	99.49	100.55	100.63	99.83	100.14	99.87

H. Cenere grigia caduta a Portici nei giorni 9 e 10 aprile 1906 (CASORIA: Ann. R. Scuola Sup. Agr. Portici, S. II, vol. VI; 1906).

I. Cenere rossiccia caduta a Portici nei giorni 9 e 10 aprile 1906 (CASORIA: Ibid.).

L. Cenere caduta a Brindisi. Eruzione 1944 (SCHERILLO: Bulletin Volcanologique, S. II, T. XIII, pp. 129-43; 1953).

M. Cenere caduta a Boscotrecase. Eruzione 1944 (SCHERILLO: Ibid.)

N. Bomba vulcanica. Eruzione 1944 (SCHERILLO: Ibid.).

O. Piccole scorie nere raccolte a Salerno. Eruzione 1944 (SCHERILLO: Ibid.).

P. Cenere chiara. Fine dell' eruzione del 1944 (SCHERILLO: Ibid.).

La cenere caduta a Brindisi (an. L) e la cenere chiara (an. P) hanno la generica composizione delle lave vesuviane, ma piuttosto che alle lave del 1944, si avvicinano a quelle del 1940-42. Sembra quindi che si tratti di frammenti polverizzati di vecchie lave.

La cenere di Boscotrecase (an. M) potrebbe rappresentare il risultato di una classificazione gravitativa; perchè sembra che si sia arricchita indirettamente dei componenti più pesanti, cioè dei pirosseni. Più probabilmente però rappresenta un prodotto intermedio tra la lava del 21 marzo 1944 e la scoria del 22 marzo (an. E-F). Questo certamente vale per le scorie di Salerno (an. O) che rappresentano un prodotto intermedio tra le due scorie, di cui alle analisi F e G, esse rapppresentano inoltre un prodotto coevo al magma.

Per la cenere di S. Valentino Torio qualche incertezza è data dai valori relativi di MgO e CaO, perchè il primo sembra un pò troppo alto rispetto al secondo; ad ogni modo la composizione della cenere corrisponde abbastanza bene a quella media delle lave vesuviane (salvo una maggiore ossidazione del ferro che si spiega con lo stato di grande suddivisione delle ceneri), perciò possiamo ritenerla costituita da detriti di lave non differenziate, per quanto sia impossibile giudicare se tali lave erano coeve o precedenti all' eruzione.

b) Pirosseno dell' eruzione del 1944.

L' analisi fu eseguita su alcuni cristalli raccolti dal prof. PARASCANDOLA durante l' ultima eruzione del Vesuvio, in località Badia di Cava dei Tirreni. Si tratta di cristalli monoclini con un notevole allungamento in direzione dell' asse Z, di colore verde bottiglia.

Secondo A. SCACCHI anche nell' eruzione del 1839 si ebbero proiezioni di cristalli isolati di augite, anche a distanza notevole dal cratere.

L' analisi ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	47.97
TiO_2	0.67
Al_2O_3	10.16
Fe_2O_3	4.36
FeO	3.15
MnO	0.15
MgO	10.60
CaO	19.97
K_2O	1.07
Na_2O	1.38
P_2O_5	0.30
CO_2	0.66
H_2O	0.12
	100.56

Ecco, per confronto, le analisi di alcuni pirosseni delle ultime eruzioni vesuviane:

	I	II	III	IV
SiO_2	45.50	47.25	49.27	51.67
TiO_2	0.70	0.65	0.50	0.30
ZrO_2	0.09	0.04	0.06	tr.
Al_2O_3	7.76	8.62	7.26	4.96
Fe_2O_3	4.52	4.25	2.81	1.62
FeO	4.76	4.79	3.80	3.03
MnO	0.16	0.14	0.12	0.14
MgO	11.92	10.55	13.04	14.29
CaO	21.96	21.40	20.94	22.63
K_2O	0.19	0.46	0.67	0.29
Na_2O	2 22	0.97	1.46	0.57
H_2O^-	0.14	0.05	0.09	0.10
H_2O^+	0.36	0.70	0.53	0.43
	100.28	99.87	100.55	100.03

I. Pirosseno dell' eruzione del 1929 (Sinno: Boll. Soc. Nat. Napoli, vol. LXI, p. 78; 1952).

II. Pirosseno dell' eruzione del 1944. Cristalli isolati caduti ad Orti

Avagliana, presso Nocera (Scherillo: Bulletin Volcanologique, S. II, T. XIII, p. 138; 1953).

III. Proietto quasi esclusivamente pirossenico raccolto a Boscotrecase. Eruzione 1944 (Scherillo: Ibid.).

IV. Pirosseno. Cristalli isolati raccolti a Boscotrecase. Periodo finale dell'eruzione 1944 (Scherillo: Ibid.).

Come è noto, i pirosseni appartengono al tipo degli « inosilicati », cioè sono costituiti da tetraedri SiO_4 riuniti a catena semplice e disposti in modo che due atomi di O siano comuni con due altri tetraedri contigui, mentre i rimanenti due atomi appartengono ad un solo tetraedro. In tal modo si hanno due atomi di O che contano ciascuno per uno, e due che, essendo comuni anche ai tetraedri contigui, contano per metà. In totale, per ogni atomo di Si abbiamo $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$ atomi di O.

Il radicale sarebbe quindi SiO_3, però, siccome nei pirosseni alluminiferi una parte di Si è sostituito da Al, si ha in questi pirosseni un leggero eccesso di O su Si.

Secondo gli autori moderni la composizione dei principali tipi di pirosseni monoclini, non alcalini, è la seguente:

Diopside: $Ca_8\ Mg_8\ [Si_{16}\ O_{48}]$

Diallagio: $Ca_7\ (Mg, Fe'')_{7,5}\ (Al, Fe''')_{1,5}\ [Al_{1,5}\ Si_{14,5}\ O_{48}]$

Augite: $Ca_{6,5}\ Na_{0,5}\ (Mg, Fe'')_7\ (Al, Fe''')_2\ [Al_{1,5}\ Si_{14,5}\ O_{48}]$

Procedendo al calcolo della formula, posto $O = 48$, si ha il pirosseno della Badia di Cava dei Tirreni:

Si		14.20	16.00
Al	3.54	1.80	
		1.74	2.71
Fe'''		0.97	
Ti		0.15	5.64
Fe''		0.78	
Mn		0.04	
Mg		4.67	
Ca		6.33	7.52
K		0.40	
Na		0.79	

Quindi la formula sarà:

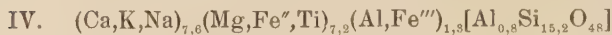
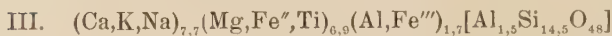
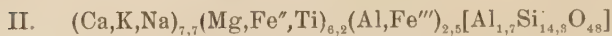
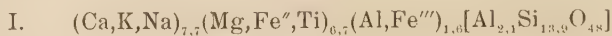
$$(Ca,K,Na)_{7,52}(Mg,Fe'',Mn,Ti)_{5,64}(Al,Fe''')_{2,71}[Al_{1,80}Si_{14,20}O_{48}]$$

Per i pirosseni delle altre analisi si hanno le formule:

I. $(Ca,K,Na)_{7,7}(Mg,Fe'',Ti)_{6,7}(Al,Fe''')_{1,6}[Al_{2,1}Si_{13,9}O_{48}]$

II. $(Ca,K,Na)_{7,7}(Mg,Fe'',Ti)_{6,2}(Al,Fe''')_{2,5}[Al_{1,7}Si_{14,3}O_{48}]$

III. $(Ca,K,Na)_{7,7}(Mg,Fe'',Ti)_{6,9}(Al,Fe''')_{1,7}[Al_{1,5}Si_{14,5}O_{48}]$

IV. $(Ca,K,Na)_{7,6}(Mg,Fe'',Ti)_{7,2}(Al,Fe''')_{1,3}[Al_{0,8}Si_{15,2}O_{48}]$

Il pirosseno della Badia di Cava dei Tirreni è quindi un' augite comune, e così pure il pirosseno delle analisi I, II, III, mentre quello dell' analisi IV è una augite leggermente diopsidica.

c) *Pirosseno di un proietto pirossenico del M. Somma.*

Si tratta di un proietto costituito essenzialmente da pirosseno in cristalli finissimi di colore verde chiaro.

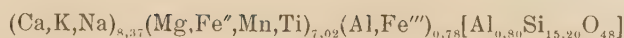
Ne riporto l' analisi (I) accanto a quella (II) del pirosseno di un consimile proietto pure del M. Somma, eseguita dal dott. R. Sinno (Boll. Soc. Nat. Napoli, vol. LXI, p. 78; 1952).

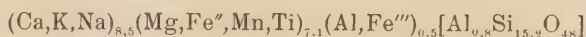
	I	II
SiO_2	51.72	51.20
TiO_2	0.20	0.20
ZrO_2	—	0.05
Al_2O_3	2.98	2.44
Fe_2O_3	2.57	2.60
FeO	0.90	0.77
MnO	0.27	0.10
MgO	15.28	15.70
CaO	25.31	25.32
K_2O	0.29	0.19
Na_2O	0.58	0.80
H_2O^-	0.37	0.13
H_2O^+		0.29
	100.47	99.79

Anche per questo pirosseno viene calcolata la formula, ponendo O=48:

Si		15,20	16.00
Al	10.2	0.80	
		0.22	0.78
Fe'''		0.56	
Ti		0.04	7.02
Fe''		0.21	
Mn		0.07	
Mg		6.70	
Ca		7.94	8.37
K		0.11	
Na		0.32	

si ha la formula:

$$(Ca,K,Na)_{8,37}(Mg,Fe'',Mn,Ti)_{7,02}(Al,Fe''')_{0,78}[Al_{0,80}Si_{15,20}O_{48}]$$

Per l' analisi II la formula è:

$$(Ca,K,Na)_{8,5}(Mg,Fe'',Mn,Ti)_{7.1}(Al,Fe''')_{0.5}[Al_{0,8}Si_{15,2}O_{48}]$$

Dei due pirosseni, come sono identiche le condizioni di giacitura, così lo sono le composizioni chimiche. Si tratta quindi di augiti diopsidiche.

d) Leucite del monte Somma.

I cristalli di leucite che ho analizzato sono stati isolati da una antica lava del M. Somma. Essi erano ancora freschi e non analcimizzati ed avevano dimensioni notevoli per cui fu facile la loro separazione con mezzi meccanici.

L' analisi chimica eseguita, secondo i soliti metodi analitici, ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	54.64
Al_2O_3	23.93
Fe_2O_3	1.41
CaO	0.34
MgO	0.59
K_2O	16.18
Na_2O	3.00
H_2O	0.55
	100.64

Facendo il calcolo della formula chimica per questa leucite, sulla base di $O = 6$, si ha:

Si	1.9560	
Al	1.0097	1.0477
Fe'''	0.0380	
Ca	0.0130	0.9907
Mg	0.0314	
K	0.7383	
Na	0.2080	

$$(K, Na, Ca, Mg)_{0,99} [(Al, Fe''')_{1,05} Si_{1,96} O_6]$$

che corrisponde praticamente alla formula teorica della leucite:

$$K [Al Si_2 O_6]$$

e) Olivina della spiaggia vesuviana presso la torre di Bassano.

Questa olivina proviene dalla disgregazione dei tufi e delle lave vesuviane ed è stata raccolta sulla spiaggia vesuviana presso la Torre di Bassano. E' costituita da granuli di colore verde oliva, assai tipico.

L'analisi chimica ha dato i seguenti risultati:

SiO_2	40.08
Al_2O_3	1.89
FeO	10.31
MnO	0.66
CaO	0.28
MgO	45.65
K_2O	0.76
Na_2O	0.67
H_2O	0.20
	100.50

Ponendo O = 4 per questa olivina, si calcola la formula seguente:

Si		0.9876	1.000 (Si + Al)
Al	0.0548	0.0124	
		0.0424	R''' 0.0424
Fe″		0.2124	R'' 1.9093
Mn		0.0138	
Ca		0.0074	
Mg		1.6757	
K		0.0239	R' 0.0558
Na		0.0319	2.0075

Cioè si ha:

$$(R', R'', R''')_{2,0075} [Al_{0,0124} Si_{0,9876} O_4]$$

Si tratta di una olivina in cui predomina la molecola della forsterite.

Istituto di Chimica generale dell' Università, Napoli, giugno 1954.

Determinazioni meridiane di ascensioni rette di pianeti e pianetini

Nota III del dott. **Riccardo Barbatelli**, *presentata dal socio* **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 2 aprile 1955)

Sunto. - Si comunicano i risultati ottenuti da osservazioni dell' Autore nel 1954, seguitando la sistematica ricerca iniziata nel 1952, con un cenno alle modalità con le quali furono osservati i pianeti e pianetini, ed i eseguiti i calcoli.

In questa nota, la terza di questa serie, si riportano i risultati delle osservazioni meridiane dei pianeti Marte, Giove, Saturno, Urano e Nettuno e dei pianetini Cerere e Vesta, eseguite durante il corso del 1954 allo strumento dei passaggi di Bamberg, continuando così il lavoro degli anni precedenti, con la sola differenza di aver aggiunto ai corpi celesti presi in considerazione nei decorsi anni i tre pianeti Nettuno, Saturno e Marte. Metodo e strumento rimasero inalterati; e così pure si seguitò ad appoggiarsi alle posizioni fondamentali del F. K. 3.

Per la determinazione dell' azimut strumentale, sono sempre state osservate una, due, o tre stelle circumpolari, delle quali una in culminazione superiore e, quando il numero di esse era maggiore di una, si è anche osservata una stella in culminazione inferiore, dei valori ottenuti si è fatta la media sera per sera.

Per Nettuno, Cerere, Vesta ed Urano, apparendo gli astri quasi puntiformi si è sempre bisecato il dischetto.

Per Saturno invece, si è portato il filo mobile del micrometro tangente al lembo che prima appariva nel campo del cannocchiale subito dopo gli anelli, e si è seguito il pianeta fino a circa metà campo, dopo l' inversione, si è atteso che lo stesso lembo entrasse in contatto col filo mobile e si è ripetuta l' osservazione.

Per Marte e Giove invece, si è portato il filo mobile del micrometro tangente al lembo che prima appariva nel campo del cannocchiale, e si è operato come per Saturno.

Dopo aver ricavato per tutti l' A. R. sera per sera, si è dedotto dalla « American Ephemeris and Nautical Almanac » del 1954 il corrispondente valore calcolato tenendo conto delle differenze prime e seconde per il confronto.

Per quanto riguarda Saturno si è tenuto conto delle dimensioni del

semidiametro equatoriale, (aggiuggendolo ai tempi dei passaggi del lembo superiore) per far si da potersi riferire al centro del disco.

Ma siccome nella citata effemeride, a pagina 196-197, sono riportati i i valori dei semidiametri polari, a questi si è, di volta in volta aggiunto un decimo del loro importo, corrispondente allo schiacciamento del pianeta, e così si sono ottenuti i dati relativi dei semidiametri equatoriali, tali numeri, dopo essere stati trasformati in tempo, sono stati aggiunti ai tempi di passaggio osservati.

Per la riduzione al centro del disco di Marte; dato che a pagina 461 della « American Ephemeris and Nautical » sono tabulati i valori corrispondenti al diametro, questi, divisi per due e quindi trasformati in tempo, sono stati rispettivamente aggiunti ai tempi osservati dei passaggi.

Per la riduzione al centro del disco di Giove si è operato come per Marte, i valori corrispondenti al diametro equatoriale risultano a pagina 467 della suddetta effemeride.

Le coordinate delle stelle di confronto sono state ricavate dalle « Apparent Places of Fundamental Stars » del 1954; esse sono:

Per Nettuno, Saturno, Cerere, Marte;

	Numero di volte che è stata osservata		Numero di volte che è stata osservata
ν Cephei	—	β Coronae Borealis	3
3 Comae Berenicis	1	ϑ Coronae Borealis	2
δ Ursae Minoris	—	Φ Bootis	4
η Virginis	1	α Serpentis	4
β Canum Venaticorum	3	K Serpentis	3
χ Virginis	4	λ Librae	4
35 Virginis	4	π Scorpii	3
32 Comae Berenicis	7	β Scorpii	
δ Virginis	3	Groo. 750 Cephei	—
44 Virginis	6	B. D. 60° 316 Serpentis	2
ϑ Virginis	7	ε Ophiunchi	1
σ Virginis	7	β Herculis	2
α Virginis	5	ζ Ophiunchi	2
82 Virginis	2	Bradley 2114 Ophiunchi	3
η Ursae Majoris	7	ε Ursae Minoris	
η Bootis	11	19 Ophiunchi	1
τ Virginis	10	51 Herculis	1
9 H. Bootis	8	K Ophiunchi	1
K Virginis	3	80 G. Ophiunchi	2
λ Bootis	2	97 Ophiunchi	3
α Librae	1	U. Ophiunchi	2
22 Bootis	6	ϑ Ophiunchi	3

	Numero di volte che è stata osservata		Numero di volte che è stata osservata
γ Bootis	8	λ Herculis	4
10 G Librae	8	Groo. 244 Cephei	—
32 Bootis	8	δ U. Minoris	3
Groo. 2192 Cephei	—	γ Sagittarii	2
α^2 Librae	2	μ Scuti	1
Bradley 1908 Virginis	1	30 Sagittarii	
Groo. 2196 U. Minoris	5	B. D. 13° 4863 Serpentis	3
109 Virginis	1	μ Sagittarii	3
β Bootis	8	δ Sagittarii	2
45 Bootis		β Scuti	
Bradley 402 Cephei	7	114 Sagittarii	2
3 Serpentis		ε Aquilae	1
Piazzi 15^h 36 Serpentis	3	τ Sagittarii	1
30 Librae	2		

Per Giove, Urano, Vesta

	Numero di volte che è stata osservata
ρ Persei	3
δ Arietis	7
ξ Eridani	8
τ Arietis	6
ξ Tauri	6
B. D. 34° 674 Persei	7
17 Tauri	6
Piazzi 3^h 1871 Tauri	8
37 Tauri	7
53 Eridiani	4
Bradley 658 Persei	6
Groo. 750 Cephei	—
π^5 Orionis	3
ε Aurigae	9
ε Leporis	9
μ Aurigae	5
λ Aurigae	9
22 Orionis	7
115 Tauri	6
χ Aurigae	9
ζ Tauri	10
ο Aurigae	7

ν Aurigae	8
60 Orionis	4
1 Geminorum	3
94 G. Leporis	4
K. Aurigae	6
7 Monocerontis	8
ε Monocerontis	9
ν Geminorum	8
56 Monocerontis	7
51 Aurigae	5
ε Geminorum	6
80 G. Monocerontis	5
ϑ Canis Majoris	6
ω Geminorum	6
51 H. Cephei	—
2 G. Canis Majoris	4
51 Geminorum	4
64 Aurigae	4
66 Aurigae	4
β Canis Minoris	4
ν Geminorum	4
289 Puppis	3
20 Cancri	3
29 Cancri	2
η Cancri	1

E' di notevole interesse la considerazione degli scarti che ogni singola stella dà rispetto ai Δt delle varie serate di osservazione; ciò si collega direttamente alla questione degli errori del sistema di riferimento, questione che in mole ed in precisione eccede la portata di queste note.

Tuttavia, se anche non appare qui utile la considerazione degli scarti stella per stella, è bene effettuarne una considerazione complessiva, che dà un' idea abbastanza adeguata degli errori che le osservazioni qui riferite comportano sulle ascensioni rette.

Perciò si sono eseguite anzitutto sera per sera le differenze tra il Δt medio e quelli indicati dalle singole stelle. Considerati poi, per tutte le serate di osservazione, gli scarti trovati e riclassificati stella per stella, si sono calcolate le differenze tra i valori medi dei detti scarti (relativi ad ogni singola stella) ed i valori singoli (per la stessa stella). Esclusa la considerazione di ste'le con una o due determinazioni, tutte le differenze o scarti trovati, forniscono evidentemente i dati per la valutazione degli errori di osservazione in ascensione retta.

Senza riportare i particolari numerici della determinazione, si può dare senz' altro il risultato:

Per le stelle della lista Nettuno, Saturno, Cerere, Marte: Errore medio (quadratico) di una singola osservazione stellare serale di ascensione retta: $\pm 0^s.160$; per le stelle della lista Urano, Giove, Vesta, valore corrispondente: $\pm 0^s.161$. Come vedesi le due determinazioni sono molto d' accordo tra di loro. Dato il numero e la distribuzione delle osservazioni è assai difficile ricavare indicazioni di più significativa portata dal punto di vista della teoria delle probabilità.

Le A. R. ottenute, per i pianeti sono riportate alla 3ª colonna delle tabelle; le differenze O · C tra i valori osservati e quelli calcolati sono riportati alla 4ª colonna.

TABELLA I (Nettuno)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	nº stelle confronto
1954 mar. 30	$0^h08^m0^s.2$	$13^h35^m39^s.29$	$-0^s.38$	13
apr. 1	00 0 .1	35 27 .54	.37	4
4	23 48 0 .0	35 09 .58	.38	15
9	27 0 .9	34 39 .22	.37	15
12	15 0 .8	34 20 .83	.39	13
20	22 39 0 .5	33 31 .55	.42	21
25	19 0 .3	33 01 .25	.39	22
mag. 23	20 26 0 .7	30 29 .26	.42	34

TABELLA II (Saturno)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	Nº stelle confronto
1954 mar. 30	$0^h58^m0^s.4$	$14^h25^m52^s.35$	$-0^s.06$	13
apr. 4	37 0 .5	24 38 .70	+.02	15
9	16 0 .6	23 19 .66	—.36	15
12	04 0 .0	22 30 .73	.23	13
20	23 34 0 .5	20 14 .73	.34	21
25	09 0 .2	18 47 .54	.23	22
27	00 0 .7	18 12 .55	.18	23
28	22 52 0 .3	17 55 .24	.02	17
mag. 16	21 36 0 .4	12 50 .81	.23	10
23	07 0 .1	11 04 .80	.23	34
25	20 58 0 .8	10 36 .25	.12	35
27	50 0 .5	10 08 .77	.28	4

TABELLA III (Cerere)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N° stelle confronto
1954 apr. 4	$22^h57^m0^s.6$	$12^h43^m49^s.34$	$-0^s.10$	15
9	28 0 .9	39 35 .33	.23	15
20	21 37 0 .3	31 13 .86	.03	21
24	19 0 .0	28 40 .29	.11	6
25	14 0 .5	28 04 .80	.15	22
27	05 0 .5	26 57 .65	.27	23
28	01 0 .1	26 25 .92	.19	17

TABELLA IV (Marte)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N° stelle confronto
1954 mag. 14	$2^h09^m0^s.9$	$18^h35^m43^s.29$	$-0^s.14$	18
23	1 37 0 .0	35 45 .39	.27	34
25	29 0 .1	37 37 .44	.13	35

TABELLA V (Vesta)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N° stelle confronto
1954 set. 30	$4^h23^m0^s.6$	$5^h57^m03^s.81$	$+0^s.11$	10
ott. 2	17 0 .2	59 27 .50	.15	23
4	10 0 .7	6 00 46 .19	.16	14
13	3 40 0 .2	05 29 .44	.13	22
17	26 0 .0	06 56 .26	.18	37
27	2 48 0 .7	08 36 .29	.15	33
nov. 2	24 0 .8	08 11 .04	.15	18
5	12 0 .5	07 33 .53	.16	39

TABELLA VI (Giove)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N° stelle confronto
1954 ott. 17	$5^h21^m0^s.4$	$8^h02^m42^s.83$	$-0^s.13$	37
27	4 45 0 .5	05 58 .80	.26	33
29	38 0 .2	06 29 .51	.19	36
nov. 5	12 0 .1	07 52 .96	.14	39
dic. 3	2 21 0 .3	06 45 .72	.26	16
16	1 26 0 .3	02 43 .68	.26	14

TABELLA VII (Urano)

Data	Ora di T. U.	A. R.	O—C	N° stelle confronto
1954 ott. 27	$4^h39^m0^s.3$	$7^h59^m30^s.67$	$-0^s.00$	33
29	31 0 .5	59 32 .95	.11	36
nov. 5	04 0 .0	59 34 .50	.03	39
dic. 3	2 12 0 .3	57 51 .94	.07	16
16	1 19 0 .6	56 12 .40	.08	14

Considerando gli scarti dei singoli valori O – C dalla media quali errori, delle singole determinazioni serali, risultano rispettivamente quali errori medi delle determinazioni serali:

Pianeta	n° osservazioni	O – C (medio)	E. M.
Nettuno	8	$-0^s.39$	$\pm 0^s.070$
Saturno	12	— .19	.034
Cerere	7	— .15	.096
Marte	3	— .18	.044
Vesta	8	+ .15	.074
Giove	6	— .20	.030
Urano	5	— .05	.006

Nei lavori pubblicati precedentemente, per Vesta nell' aprile del 1952 si è trovato un valore medio $O-C=+0^s.21$; nel periodo luglio settembre 1953 si ebbe $O-C=+0^s.12$, in questo invece si ha $O-C=+0^s.15$.

Nell' aprile del 1952 le osservazioni furono 8, nel 1953 furono 16 rispet-

tivamente con 6,4 e 15,4 stelle di confronto in media ognuna; ora le osservazioni sono state 8 con 24,5 stelle di confronto in media per ognuna.

Per Cerere si è trovato nel periodo novembre 1952 - gennaio 1953 un valore medio di O—C=—0s.06, ora invece si ha O—C=—0s.16. Precedentemente le osservazioni furono 9 con 6,4 stelle di confronto in media, attualmente le osservazioni sono state 6 con 16,8 stelle di confronto in media per ognuna.

Per Urano nel febbraio 1953 si è ottenuto un valore medio di O—C=—0s.05 per 13 osservazioni con 9 stelle in media per ognuna, nello ottobre-novembre dello stesso anno si è avuto un O—C=—0s.04, con 6 osservazioni e 13,4 stelle di confronto per ognuna; ora invece si è ottenuto un O—C=—0s.05, con osservazioni e 27,6 stelle di confronto per ognuna.

Per Giove nell' ottobre-novembre 1953 si è ottenuto un valore medio di O—C=—0s.28 con 7 osservazioni e 16,4 stelle di confronto per ognuna; ora invece si è ottenuto un valore medio di O—C=—0s.20 con 6 osservazioni e 29,1 stelle di confronto per ognuna.

Per Nettuno ora si è ottenuto un valore medio di O—C=—0s.39 con 8 osservazioni e 17,1 stelle di confronto per ognuna.

Per Saturno si ha O—C= 0s19. con 12 osservazioni e 18,5 stelle di confronto in media di ognuna.

Per Marte si è ottenuto un valore medio di O—C=—0s.18 con 3 osservazioni e 29 stelle di confronto in media per ognuna.

Dalle tabelle risulta che l' accordo tra i valori di O—C è quasi perfetto, ad eccezione per i 2 valori di O—C di Saturno relativi al 4 e 28 aprile, ma tale disaccordo trova la sua ragion di essere, perchè in dette sere, il cielo era nuvoloso nell' ora del passaggio dell' astro.

Per Marte, Giove e Saturno, per cui si è tenuto il filo micrometrico tangente al disco, si è apportata una correzione sistematica per lo spessore del filo: questa correzione sarà riferita nel contributo successivo (osservazioni N. 4) relativo alle osservazioni 1955.

La biologia vegetale del nostro tempo

(Ricordando Federico Delpno nel cinquantesimo anniversario della morte)

Nota del socio ordinario **Giuseppe Catalano**

(Adunanza del dì 7 maggio 1955)

Sunto. – Ricorrendo il 50° anniversario della morte di Federico Delpino, l' A. mette in evidenza, in questo scritto, come sia rimasto sempre attuale e vivo il bisogno di interpretare i fenomeni della natura vivente sulla stessa base finalistica tratteggiata dal Delpino quando creò la sua Biologia vegetale. Gl' imponenti progressi scientifici e tecnici del nostro tempo non hanno fatto che confermare brillantemente ed estendere tale necessità dello spirito.

Nel recinto degli Uomini illustri del Cimitero di Poggioreale Napoli custodisce le spoglie di Colui che ben a ragione si può considerare come il Fondatore della moderna Ecologia. Federico Delpino fu Professore ordinario di Botanica nell' Ateneo napoletano e Direttore del nostro Orto Botanico dal 1893 al 1905. In tale qualità egli, nel 1899, diede inizio a una pubblicazione periodica di Botanica scientifica, cui diede il titolo di « Bollettino dell' Orto Botanico della R. Università di Napoli ». La Reale Accademia delle Scienze di questa città lo elesse Socio residente e la Facoltà di Scienze dell' Università lo ebbe Preside per un certo periodo. Fu Presidente della Società Botanica Italiana, Socio nazionale dell' Accademia dei Lincei, Membro di numerose altre Accademie e Società scientifiche italiane e straniere. In occasione del suo 70° genetliaco, che ricorreva il 27 Dicembre del 1903, l' Università di Napoli, l' Accademia, i Colleghi, gli Allievi, gli Amici d' Italia e dell' Estero gli tributarono solenni onoranze, offrendogli una medaglia.

Dell' opera botanica e della figura di Federico Delpino come biologo-filosofo dopo la sua morte molto ed autorevolmente è stato scritto. Qui sarà sufficiente ricordare l' ultima commemorazione, fatta da A. Béguinot nel 1934, in occasione del centenario della nascita, per iniziativa della città di Chiavari, dove Egli ebbe i natali. Nel volume pubblicato in quella occasione è raccolta tutta la bibliografia delpiniana con notizie bibliografiche, nonchè l' elenco delle commemorazioni e degli scritti che trattano della opera Sua, elenco che comprende oltre 30 titoli. Molti anni più tardi, nel 1950, su istanza di chi Vi parla, il Comune di Napoli dedicava al nome di

F. Delpino una delle vie adiacenti all' Orto Botanico (il prolungamento della via della Veterinaria verso il Rione dei Vergini), essendo sindaco lo Avv. Moscati e Rettore Magnifico dell' Università il nostro prof. Quagliariello. Con ciò si ovviava ad una inspiegabile omissione, verificatasi negli anni immediatamente seguenti la morte, essendo, come è noto, i nomi di tutti i Botanici napoletani o che insegnarono e diressero l' Orto Botanico ricordati in altrettante vie di quel rione. Dalla stessa epoca il Bollettino, giunto al Tomo XVIII, è stato ribattezzato in Suo onore col nome di *Delpinoa,* anche in questo seguendo una costumanza molto in uso in Italia ed all' Estero, per perpetuare la memoria di Uomini insigni nei vari campi del sapere.

Il 14 Maggio ricorre il cinquantesimo anniversario della dipartita di questo nostro illustre Maestro; e nel rilevare la ricorrenza il pensiero va alla Sua creazione più caratteristica, alla Sua « Biologia vegetale », a questo capitolo della Botanica di cui chiunque non nuovo agli studi naturalistici conserva un ricordo fascinoso, come di una Scienza attraente, dilettevole, che parlava alla fantasia prima ancora che alla mente. Ciò è in evidente contrasto col carattere positivo, severo, quasi arcigno che hanno tutte le Scienze dei nostri giorni. E vien fatto di domandarsi se la Biologia vegetale delpiniana sussiste ancora col suo carattere originario; se la cultura moderna può ancora adornarsi di questo carattere umano o almeno se oggi l' importanza delle verità scientifiche ha la stessa attrattiva delle verità biologiche delpiniane. Questo evidente mutamento del gusto scientifico, non soltanto nel campo della Biologia, mi ha persuaso che il miglior modo di ricordare F. Delpino in questa ricorrenza, meglio di una nuova commemorazione o di una nuova eségesi dell' opera sua, sia quello di presentare un disegno storico-critico dell' evoluzione della Biologia vegetale, durante quest' ultimo nostro mezzo secolo.

Che cosa è dunque la Biologia vegetale del Delpino? La parola Biologia non ha bisogno di essere spiegata; ma nel pensiero delpiniano il contenuto di questa Scienza doveva essere limitato alla considerazione delle forme esteriori dei viventi vegetali nei confronti coi fattori dello ambiente. All' epoca del Delpino, cioè negli ultimi decenni dello scorso secolo e nei primi anni del nostro, erano soprattutto in onore, nel campo botanico, le ricerche di sistematica, le quali necessariamente si appoggiavano sullo studio sempre più accurato della Morfologia esterna e quindi sulla descrizione e sulla comparazione. Pure in gran conto erano però tenuti la sperimentazione in campo e gli studi sulle mutazioni, sull' ibridismo, sulla staurogamia e insomma su tutti i fatti della vita vegetale per i quali era sufficiente l' osservazione ad occhio nudo, l' assiduità e la perspicuità della interpretazione. Era già sorta da tempo l' Anatomia vegetale,

ma essa si limitava ancora alla recognizione delle più grossolane strutture interne degli organi, ed era appena agli albori la Citologia. Per queste ragioni, all' epoca a cui ci riferiamo, non erano ancora del tutto scomparse talune menti, anche preclare, che tuttavia guardavano al microscopio con diffidenza, se non proprio con dispregio. E' fama che F. DELPINO sia stato una di questi menti. Nessuno dei 90 lavori da Lui pubblicati in circa 40 anni di attività scientifica si fonda su osservazioni microscopiche. Ricordiamo ciò perchè all' epoca in cui Federico DELPINO pose le basi della sua Biologia vegetale, queste basi erano largamente e sicuramente fornite da fatti direttamente osservabili ad occhio nudo. Nell' opera che ha per titolo: « Pensieri sulla Biologia vegetale, sulla Tassonomia, sul valore tassonomico dei caratteri biologici e proposta di un genere nuovo della famiglia delle Labiatae », pubblicata nel 1867 nel Vol. XXV del « Nuovo Cimento » di Pisa, il DELPINO statuisce il concetto fondamentale di questa branca della Botanica, ponendo alla base di ogni carattere formale e materiale del corpo del vivente vegetale l' esistenza di un principio razionale, che occorre osservare attentamente e mettere in evidenza, se si vuole che la conoscenza dei Vegetali sia veramente una conoscenza degna di questo nome e non si riduca invece a un' arida e infeconda contemplazione di forme e di metamorfosi, delle quali sfugge il concetto, il significato, lo spirito. Con altre parole, la Morfologia, second , il DELPINO, porge semplicemente alla attenzione dello Studioso il materiale vivente nelle sue forme più svariate, le quali però acquistano carattere, consistenza, dignità, significato reale solo in quanto sono strumento di un lavoro vitale, sono l' espediente materiale per la esecuzione degli atti della Vita. La forma del Vivente, pertanto, si differenzia dalla forma di qualsiasi altro corpo non vivente per la finalità precisa, per cui essa è preordinata. Tutto ciò, conveniva bene DELPINO, deve essere tenuto ben distinto dai fenomeni della vita interna delle piante, quali ad es. gl' intimi processi della nutrizione, dell' accrescimento, della riproduzione, il cui studio forma più propriamente oggetto della Fisiologia.

Così, ad esempio, tutte le lamine fogliari sono organi sempre espansi in superficie indipendentemente dalla forma complessiva e dalla estensione; e questo perchè la funzione vitale che in esse si svolge, cioè la fotosintesi, è appunto una funzione di superficie; tanto è vero che in molte specie di piante in cui mancano le lamine fogliari e ad organi della fotosintesi si adattano organi di natura morfologica differente, questi si appiattiscono simulando delle lamine, qualunque sia la loro forma originaria. Sono tali ad es. i fillodi, i cladodi, le radici delle Podostemonacee, ecc. Similmente, la forma delle cellule e dei tessuti meccanici è costantemente quella allungata rispettivamente a fibre ed a cordoni, come quella che appunto risulta la più idonea alla resistenza alle sollecitazioni meccaniche. E ancora,

la causa della forma e della struttura dei fusti che si attorcigliano ai sostegni ovvero che si arrampicano per mezzo dei cirri è sempre la forza di gravità, la quale tuttavia agisce differentemente sulle varie specie di Vegetali, per la qual cosa è ovvio ammettere in ognuna di queste una differente facoltà di reagire al medesimo stimolo.

Ma, oltre la forma, certamente ogni altro attributo esteriore degli organi vegetali, secondo il Delpino, ha una ben determinata ragion di essere. Tale è per es. il colore dei fiori, differente dal verde. Questa ragion d'essere sta nella necessità, che la esistenza dei fiori sia percepita dai particolari animali che attuano il trasporto del polline; essi perciò debbono spiccare dal fondo uniformemente verde, che è il colore fondamentale di tutti i Vegetali. Essendo, come è noto, il colore dei fiori straordinariamente vario, vi è inoltre da ricercare la ragione specifica del colore e degli altri particolari, caso per caso, specie per specie. Insomma, la Biologia vegetale fondata da Delpino ricerca la spiegazione razionale della forma e di ogni altro particolare, anche minimo, della struttura esterna del corpo vivente dei Vegetali; e tale spiegazione può ritrovarsi in un rapporto con un determinato fattore dell'ambiente, fisico o animato, la cui recognizione è compito indispensabile della indagine biologica. Vi è pertanto alla base della Morfologia un fatto di adattamento specie per specie, che rende straordinariamente vari i rapporti fra i Viventi vegetali ed il mondo esterno.

Conseguenza inevitabile di questo modo di impostare gli studi botanici o almeno una parte ben cospicua della Scienza dei Vegetali fu l'insorgere e l'affermarsi di quella forma mentis scientifico-filosofica che è la Teleologia. Infatti il Delpino affermò esplicitamente che un principe immateriale, intelligente e presciente presiede nei fenomeni vitali; le loro manifestazioni sono bensì accompagnate da fatti fisici e chimici, ma la recognizione di questi fatti non fa che mettere in luce le circostanza strumentali, laddove i fenomeni vitali sono il risultato di un piano preconcetto di creazione o almeno di evoluzione.

Con questa ammissione il Delpino implicitamente ritenne conciliabile l'idea di creazione con quella di evoluzione. Senza dubbio Egli fu convinto della variabilità delle specie, come dell'unica dottrina che possa rispondere al quesito se esistono rapporti, e quali sono, fra gli innumerevoli esseri viventi che si distinguono così nettamente in categorie sistematiche; o se, al contrario, ogni specie, come opinava Linneo, sia il risultato di un atto indipendente della creazione. Ciò non ostante F. Delpino fu avversario dichiarato della teorica darwiniana e in modo speciale del darwinismo materialista di Haeckel e seguaci, poichè al suo vitalismo spiritualista teleologico ripugnava l'ammettere l'intervento del caso come fattore di scelta nell'affermazione delle specie. In sostanza Egli pensava che la Vita

è una cosa molto, troppo importante perchè possa ammettersi che sia sorta casualmente sulla superficie della terra. Nella ricerca delle ragioni per le quali si sono differenziate sui vari punti di questa superficie le singole specie sistematiche di animali e di piante soccorre senza dubbio lo studio delle cause efficienti di natura fisica e chimica; tuttavia dalla spiegazione che si può dare o che si deve postulare intorno alla origine della Vita dipende pregiudizialmente il valore di qualsiasi dottrina evoluzionistica. E quindi, se si parte dalla ipotesi di una origine casuale della Vita, cioè per formazione spontanea del protoplasma, sarà sufficiente per spiegare lo ulteriore differenziamento delle specie la selezione naturale, la lotta per l'esistenza e insomma tutto il materialismo Haeckeliano, con tutte le sue conseguenze; ma qualsiasi altra ipotesi che ripudi il puro e semplice intervento del caso come causa materiale di un fatto così importante quale è l'origine della Vita comporta la necessità di una dottrina evoluzionistica fondata su ben altre basi, l'idea di una evoluzione diretta, governata, perfettamente conciliabile con quella della creazione.

Ma al DELPINO non sfuggì il carattere convenzionale del termine di « Biologia » applicato a indicare solo una parte dei fenomeni che formano oggetto della Scienza della Vita e cioè le sole manifestazioni esteriori; come del resto convenzionale appariva anche il termine di Fisiologia, applicato a designare quella parte della stessa Scienza che studia invece le manifestazioni interne. Epperò il DELPINO si rese conto della difficoltà di distinguere nettamente questi due ordini di funzioni; anzi Egli credette di ravvisare nei Vegetali l'esistenza di funzioni miste, cioè che cominciano con l'essere fisiologiche e finiscono per assumere il carattere biologico o viceversa. La qual cosa ovviamente comportava una certa confusione, per cui Egli ammoniva in siffatti casi di fare uso di grande accortezza e discernimento. Poichè però la distinzione fra i due campi era per il DELPINO e certamente anche per molti altri Biologi del suo tempo indiscutibile, Egli, rispettando l'accezione generale del termine di Biologia, avrebbe preferito che si fosse chiamata « Endobiologia » quella parte di questa Scienza che studia i fenomeni interni degli organismi, ed «Exobiologia » l'altra parte che si occupa delle manifestazioni esterne [1]).

Questi sono, molto succintamente esposti, i principi fondamentali della Biologia vegetale sanciti da DELPINO oltre mezzo secolo fa, nell'intendimento, ripetiamo, di fondare una branca della Botanica ben distinta dalla Fisiologia. Tale distinzione, invero, è rimasta; anzi oggi si è accentuata e perfezionata. Infatti oggi si chiama preferibilmente *Ecologia* appunto lo studio delle funzioni esterne di relazione con l'ambiente di tutti gli esseri viventi. Si è perciò rigogliosamente sviluppata una *Ecologia generale,* che riguarda

---

[1]) DELPINO F. *Definizione e limiti della Biologia vegetale.* in « Boll. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli », T. I, 1899, fasc. 1.

lo studio di tutti i Viventi, uomo compreso, nei loro rapporti con l'ambiente, in cui si distinguono essenzialmente due categorie di fattori: quelli fisici o chimici, quali il clima, il terreno, la gravità, la ritmicità, l'energia raggiante, ecc., e quelli animati, ossia il complesso di tutti gli altri Viventi, coi quali ogni specie viene ineluttabilmente in contatto, stabilendo con essi rapporti di svariatissima natura. Ma, a ben riflettere, anche questo termine di Ecologia (da oikos, casa, come a dire lo studio della vita casalinga degli animali, delle piante e dell' uomo), proposto da WARMING, contemporaneo di DELPINO, non è meno convenzionale di quello di Exobiologia; esso ad es., per dirla con le stesse parole di DELPINO, è inadeguato a indicare la exobiologia dell' uomo, il quale pur fabbrica case e tetti e medita leggi economiche! Ma ha avuto fortuna e in tal materia è l' uso quel che conta e noi non possiamo fare altro che prenderne atto, non senza però sottolineare che questo vigoroso rampollo moderno che è la Ecologia generale è il legittimo discendente della vecchia gloriosa Biologia vegetale creata da DELPINO.

Per tornare, dunque, a questa, diremo che il microscopio, fino allora solo parcamente usato, ben presto mise in evidenza l' esistenza nei vegetali di forme e di fenomeni intimi, cioè non direttamente osservabili ad occhio nudo, ma per i quali sussiste integralmente il principio postulato da DELPINO: l' esistenza cioè di una Morfologia interna, più minuziosa, certamente, ma altrettanto meritevole di quella stessa indagine che vuole rivelare il significato di ogni forma, proprio come nel caso della Morfologia macroscopica. Conseguentemente la recognizione delle funzioni per cui sono predisposte le forme e le struttura interne rientra nel compito della Biologia delpiniana, anche se originariamente il DELPINO non intravide tale estensione della sua dottrina. Furono infatti i suoi allievi e seguaci, fra i quali emersero specialmente A. BORZÌ e G. E. MATTEI, il primo in particolar modo dando la dovuta importanza ai reperti microscopici, a rendersi conto della universalità della dottrina delpiniana. Invero anche le funzioni fisiologiche, pur nella loro estrinsecazione materiale fisico-chimica, hanno sempre un movente originario vitale, con carattere finalistico e non può essere certamente la piccolezza dell' organo, la necessità cioè che sia osservato con l' occhio armato di lenti, una ragione che può rendere superflua la ricerca della sua ragion d' essere. Nulla vieta quindi che anche i più intimi processi vitali che si possono mettere in evidenza solo con l' aiuto dei mezzi di osservazione offerti dal Microscopio siano considerati collo stesso spirito con cui si considerano quelli macroscopici. Certamente i progressi rapidi verificatisi nel campo degli studi microscopici e della tecnica fisico-chimica, e le scoperte sensazionali venute in tal modo in luce misero in secondo piano gli studi macroscopici e diedero ben presto la impressione che molte idee, molte conoscenze che furono care ai nostri

Maestri fossero destinate a divenire irrilevanti, quasi ad essere sommerse da una prevalente importanza delle ricerche potenziate dai nuovi mezzi e e metodi di studio. Ma è chiaro che ogni epoca rappresenta uno stadio dello sviluppo della Scienza: un gradino sul quale essa ha dovuto appoggiare obbligatoriamente il piede; e soltanto rimane da vedere in quale misura ogni epoca ha contribuito alla formazione degli stadi seguenti dello sviluppo scientifico e quale orma ha lasciato su questo gradino, se questa orma si è presto cancellata o se qualche cosa è rimasta.

Ora, nel campo a cui noi qui c'interessiamo, non si può negare che Federico DELPINO fu una mente divinatrice, avendo usato appunto il termine più vasto e generale di Biologia, per alludere all'insieme dei fenomeni vitali, grandi o piccoli che siano, comportino o no l'uso di mezzi speciali di osservazione o sia sufficiente per il loro studio l'occhio nudo. La Biologia vegetale in senso lato ha progredito nei nostri 50 anni, ma non necessariamente in modo uniforme in tutti i suoi settori. Mentre il campo più ristretto dello studio della vita di relazione macroscopica, oggi, come abbiamo detto, distinto col nome di « Ecologia », conserva più evidente l'impronta originaria delpiniana, quello in cui il Microscopico e i mezzi tecnici di ricerca fisico-chimica hanno potenziato l'occhio e sussidiato la interpretazione, ha avuto sviluppi così grandiosi, da dare l'impressione che abbia dato luogo a conoscenze addirittura nuove [1]). Diciamo « impressione » e insistiamo su questo vocabolo, perchè, a ben riflettere, si constata sempre che si tratta di sviluppi indiretti di antiche cognizioni, le quali hanno fornito il necessario punto di partenza. Epperò riteniamo utile illustrare brevemente questo punto con qualche esempio.

E' stato precisamente il Microscopio, con l'aiuto di una raffinata tecnica delle relative preparazioni, nei primi decenni di questo nostro secolo, a ribadire e perfezionare le conoscenze sulla struttura del nucleo e in particolar modo sui cromosomi, sul loro comportamento durante la divisione cellulare, durante la sporogenesi e nella fecondazione. La legge della costanza specifica del numero dei cromosomi, già enunziata nel secolo scorso dalla Strasburger, ma rimasta per molti anni in un'atmosfera di incertezza, è stata nei decenni di questo nostro secolo definitivamente confermata e oggi rappresenta un caposaldo biologico. utilizzato, insieme con numerosi altri dettagli della struttura dei cromosomi stessi, per la soluzione di problemi di sistematica. Questo è appunto uno degli aspetti più sensazionali del progresso della Biologia, almeno agli occhi degli antichi Sistematici, i quali in nessun modo potevano prevedere una simile utilità del Microscopio, fatta astrazione dalle più grossolane rivelazioni della Morfologia interna, o Anatomia. Al tempo stesso, le nuove conoscenze hanno fortemente

[1]) Si consultino, in proposito, i volumi: I-XVI di *Fortschritte der Botanik*, Berlin, 1949-1954.

illuminato la comprensione dei fenomeni della eredità e della variabilità nella discendenza dei viventi, determinando, fra l'altro, il ritorno dall'oblio dei principi già enunciati un secolo e mezzo prima dall'abate MENDEL. D'altro canto l'applicazione di nuovi mezzi di analisi chimica e di mezzi fisici allo studio della costituzione intima della materia vivente ha portato al sorgere di un nuovo capitolo della Biologia pure in passato del tutto impensabile, qual'è quello che concerne la struttura submicroscopica della materia vivente, e consentito il controllo di alcuni dei più suggestivi fenomeni che avvengono nei Vegetali, come ad es. la fotosintesi, mediante l'uso dei così detti elementi marcati (isotopi radioattivi). Tutto ciò, ripetiamo, sembra un mondo del tutto nuovo, del tutto imprevisto e neppure sospettato dai nostri Maestri; e purtuttavia la sensazionale novità dei fatti non ha per niente soppresso la necessità della interpretazione, lo sforzo cioè di soddisfare il nostro bisogno di comprendere la Natura in modo conforme al nostro spirito. Noi pertanto ritroviamo nelle conoscenze biologiche moderne, scaturite dall'uso dei più acuti mezzi di ricerca, le più singolari e chiare testimonianze del finalismo e della teleologia delpiniani.

Per esempio, dallo studio della struttura submicroscopica dei cloroplasti fatto col microscopio elettronico emerge una interpretazione perfettamente analoga a quella che si impone all'osservatore munito soltanto del suo occhio nudo, che vuole rendersi ragione della forma espansa in superficie che hanno tutti gli organi della fotosintesi e per eccellenza le lamine fogliari. Abbiamo più sopra detto qual'è questa interpretazione. Ora i cloroplasti sono corpi di forma discoidale; essi pertanto possono offrire alla luce una delle superfici verdi, oppure, secondo i casi, possono rivoltarsi, esponendo alla luce soltanto il margine ristretto. Orbene, il microscopio elettronico ha messo in evidenza nella costituzione submicroscopica dei cloroplasti l'esistenza di una struttura lamellare; essi cioè sono formati da elementi detti "grani,, di forma laminare, risultanti da strati di macromolecole, immersi in uno stroma omogeneo. La clorofilla è da essi portata, mentre lo stroma è incolore. La forma laminare di questi elementi costitutivi submicroscopici è evidentemente correlata con l'assorbimento dell'energia luminosa. E' chiaro quindi che ci troviamo in presenza dello stesso principio, che già emerge dal puro e semplice studio macroscopico dell'organo della fotosintesi [1]).

Altro esempio dello stesso genere è quello della forma dei tessuti e degli elementi meccanici, cui pure abbiamo accennato in precedenza. Tale forma si ripete integralmente negli elementi submicroscopici messi in evidenza dal microscopio elettronico. Essa è precisamente quella fibrillare, cioè allungata, che si rivela come la più idonea alla funzione biologica di

---

[1]) Cfr.: FREY-WISSLING. A. — *Citologia vegetale e microscopio elettronico*, « Endeavour » XIV, 1955, 53.

sostegno; e pertanto essa si ritrova con impressionante fedeltà, oltre che nel complesso macroscopico che, come è noto, assume sempre l' aspetto di cordoni, anche nella forma delle cellule elementari, che diventano fibre, e ancora nelle microfibrille e finalmente, come abbiamo detto, nelle fibrille submicroscopiche. Queste si ritrovano colla stessa forma non solo nella costituzione delle membrane cellulosiche, ma anche in quelle chitinose dei funghi, nello scheletro chitinoso degli artropodi, in quello siliceo delle spugne e perfino nelle ossa e nella pelle dei vertebrati. Anche qui adunque il medesimo principio formale si ripresenta a livelli di grandezza differenti; un medesimo principio morfologico si ritrova in organi macroscopici, microscopici ed ultramicroscopici, la qual cosa conferma ovviamente la leggittimità della primordiale interpretazione fatta in base all' osservazione ad occhio nudo.

Altra meravigliosa testimonianza dello stesso genere ci è data dai moderni tentativi di spiegare su basi fisiologiche la vita di relazione degli insetti pronubi coi fiori nelle piante Angiosperme. In una pubblicazione del Delpino dal titolo: « Sulla funzione vessillare presso i fiori delle Angiosperme » comparsa nel 1904 Egli ribadisce con decisa autorità e convinzione idee che già erano state precedentemente emanate intorno al significato degli organi colorati dei fiori, che è appunto quello di servire da richiamo per gl' insetti trasportatori del polline, che sono generalmente le api, alcuni Lepidotteri e Ditteri. Tale interpretazione era stata da alcuni Biologi messa in dubbio o addirittura negata, anche in base ai risultati di alcuni esperimenti, i quali avevano screditato l' opinione che gl' insetti pronubi possano scorgere a distanza il colore dei fiori e possano da vicino differenziarne le varie tonalità. Il Delpino non nega l' importanza dello esperimento in Biologia, ma mette in guardia, nella pubblicazione sopra ricordata, contro la facilità di sbagliare sia nella impostazione degli esperimenti come nella interpretazione dei loro risultati. Egli afferma, che in ogni caso, la sperimentazione in Laboratorio più o meno artificiosa non distrugge l' evidenza di osservazioni dirette, che chiunque è in grado di fare in quel vasto e genuino Laboratorio che è la Natura stessa, nella fattispecie rappresentato, per es. da un prato smaltato di fiori in una mattinata di primavera. Per Lui adunque gl' insetti pronubi non solo percepiscono a distanza i colori, ma sono guidati dalle sfumature o dai contrasti di tinte quando sono vicini ai fiori stessi, in modo che il loro compito di prelevatori di polline e di impollinatori di stimmi finisce per rivelarsi quale una mirabile funzione sapientemente congegnata, per mezzo dei caratteri e della struttura dei fiori fin nei minimi particolari.

A cinquant' anni di distanza, questo capitolo della Biologia vegetale, cioè la Biologia fiorale, nulla ha perduto del suo suggestivo interesse. La

straordinaria varietà di rapporti fra i fiori e i loro visitatori richiama tutt' ora a buon diritto su tale argomento, in ogni parte del mondo, la attenzione dei Biologi e dà luogo ogni giorno a sviluppi impensati. Così dicasi, ad es., della possibilità di distinguere tipi di costituzione morfo-biologica di fiori in base agli insetti impollinatori nell' ambito di determinati gruppi sistematici anche ristretti, come ad es. un genere; lo studio del problema dell' autosterilità, di grande importanza ai fini delle dottrine evoluzionistiche; quello che concerne la origine delle Angiosperme zoogame da tipi anemogami, e così via. Ma il problema della percezione dei coloro e delle forme da parte degli animali di ogni ordine e grado, rimane sempre un problema a fondamento squisitamente biologico positivo. I più accurati e meticolosi esperimenti moderni intesi a precisare il fondamento fisiologico della percezione dei colori e della parte che hanno in questo fatto le strutture più altamente differenziate degli organi visivi, quale ad es. quelle che si rinvengono nell' occhio umano, si concludono, in ultima analisi con l' affermazione della necessità di una spiegazione unitaria. I singoli fenomeni che si mettono in evidenza studiando sperimentalmente la fisiologia della retina emanano dal principio economico generale della percezione, sono cioè effetti particolari della globale organizzazione del campo percettivo visivo. Anche nella retina dell' occhio umano ogni stimolazione non si limita a provocare processi retinici locali, ma determina un' azione di campo. Si può dire che mezzo secolo di ricerche sperimentali positive in questo campo così suggestivo non hanno potuto sostituire alla interpretazione biologica finalistica del colore dei fiori nulla che possa render ragione di questo loro carattere esclusivamente su basi meccaniche fisiologiche; la teoria della percezione dei colori, secondo una recente rassegna [1]) è sempre in crisi, come ai tempi di HELMHOLTZ e di HERING; epperò il colore dei fiori, fino a prova contraria, ha la sua ragion d'essere ontologica nelle attitudini e nella sensibilità degli animali in genere, e degli insetti pronubi in ispecie.

E' chiaro pertanto che il finalismo della forma, ossia l' impronta inconfondibilmente vitale della materia organizzata non si ferma agli aspetti esteriori macroscopici, ma investa tutta la struttura intima e tutte le particolarità fisico-chimiche della materia vivente, precisamente ciò che noi indichiamo qualificandola come *materia organizzata*. Andando più oltre nell' analisi c' imbattiamo nelle macromolecole colloidali, quali elementi materiali di costruzione, i quali hanno certamente una forma propria, ma sono soprattutto adatti *a disporsi*, nell'uno o nell' altro modo; questa attitudine alla disposizione delle macromolecole è, a quanto pare, il fondamento della organizzazione, della creazione cioè di una forma in cui si

---

[1]) Cfr.: MUSATTI L. — *La crisi attuale nella teoria della percezione dei colori.* « Scientia », XII, 1954.

rivela l'esistenza di un disegno preventivamente tracciato, e cioè di una idea, di una volontà e quindi di una forza esclusivamente vitale, o meglio spirituale. Questa forza, fino a quando non sarà diversamente dimostrato, non può risiedere nelle macromolecole stesse, ma è certamente qualche cosa di estraneo, di esterno alla materia stessa. Le macromolecole invero solo obbedíscano passivamente a questo richiamo, a questa attrazione ordinata e non sono esse che creano spontaneamente il disegno. Tanto è vero che, quando una organizzazione si è completata, a mezzo di un congruo numero di macromolecole secondo un disegno specifico, sappiamo che essa si rinnova mediante la moltiplicazione, cioè mediante un processo che non ha riscontro nella materia non vivente, e di cui abbiamo un modello enormemente ingrandito nella schizogenesi dei Batteri; ed i prodotti di questa moltiplicazione possono a loro volta associarsi e disporsi, dando luogo a strutture più complesse, sempre però secondo un piano specifico e sono capaci di determinare ancora un richiamo di macromolecole dall'ambiente materiale o probabilmente anche di costruirle a mezzo di molecole chimiche. Questa prerogativa della materia vivente esprime sinteticamente la frase colla quale Fry-Wissling chiude il suo libro sulla struttura submicroscopica del protoplasma: «*Omnis structura e structura*» [1]; sancisce cioè il principio, finora non contradetto da alcun fatto positivo, che le macromolecole non si associano mai spontaneamente fra loro in una organizzazione determinata, ma che, al contrario, ogni organizzazione deriva da una organizzazione precedente per mezzo del processo biologico della moltiplicazione. La frase sopra riportata è pertanto una traduzione dell'altro più noto aforisma biologico: «*Omnis cellula e cellula*», che però si applica a un oggetto vivente, la cellula, collocabile in un ordine di grandezza molto superiore, come ad es. la cellula batterica. E lo stesso concetto esprime infine il più antico detto: «*Omne vivum e vivo*», col quale gli antichi Biologi espressero sostanzialmente la stessa idea: la impossibilità cioè della generazione spontanea, prima ancora cioè della scoperta del microscopio e dell'ultra-microscopio. Come si vede, la storia si ripete, anche se l'ordine di grandezza degli oggetti è oggi cambiato.

Pertanto i più moderni studi di Chimica colloidale, che hanno portato alla dimostrazione dell'esistenza delle macromolecole, lungi dal fornire spiegazioni materialistiche dei fenomeni fondamentali della Vita, non hanno fatto altro che mettere in evidenza un nuovo mondo di meravigliose armonie. Queste emergono quando si studiano i rapporti fra le minime unità elementari della organizzazione vitale fino ad oggi conosciute quali, ad es. le ricordate lamelle costitutive dei cloroplasti, le fibrille delle membrane, la struttura della cellula batterica, la costituzione dei «virus» e dei «fagi»,

---

[1]) Frey-Wissling A. — *Morfologia submicroscopica del protoplasma*. Torino, Einaudi, 1951.

da una parte e il materiale di costruzione non vivente, dall' altra. Le macromolecole invero, colle loro proprietà e colle loro leggi particolari stanno di mezzo fra le molecole chimiche e le più piccole organizzazioni specifiche, come quelle sopra ricordate. Senza dubbio molte altre sorprese ci riserba ancora la ricerca scientifica in questa interessante zona di confine fra la materia non vivente e la materia organizzata; in questa zona di transizione fra il dominio delle leggi quantitative e quello delle leggi qualitative della forma e della struttura. Le macromolecole obbediscono passivamente, per quel che si sa fino ad oggi, a una forza di richiamo, ma il risultato della loro associazione nell' organismo vivente elementare piccolo o piccolissimo che sia, impone la medesima ammirazione che noi proviamo di fronte a un capolavoro dell' arte umana [1]). Questo accade per es. quando consideriamo la costituzione morfologica che il microscopio elettronico mette in evidenza al riguardo dei sopra ricordati « virus » e « fagi »; si tratta anche qui di aggregati di macromolecole, in una forma che ricorda esattamente quella dei più primordiali viventi microscopici conosciuti « ab antiquo »: quella dei Flagellati. Sembra evidente che il modello fondamentale della organizzazione vivente sia quella di un Flagellato: un corpo, cioè, formato da una testa, in cui si racchiude evidentemente la parte essenziale del vivente specifico stesso, e da un flagello, che ha l' ovvio significato di organo di locomozione; il tutto ricinto da una membrana. L' ordine di grandezza di questi organismi è quello dei milionesimi di mm. Noi vediamo ripresentarsi questo modello, già conosciuto in un grandissimo numero di specie vegetali ed animali, quali ad es. quelle che prendono parte alla formazione del plancton, tanto nello ultramicroscopico « virus » quanto nel nemasperma umano! Epperò si può presumere che nei viventi di ogni ordine e grado la costruzione materiale e formale del corpo procede per modelli analoghi; di guisa che perfino l' organismo visibile ad occhio nudo non è, si potrebbe ben dire, che un multiplo di unità elementari simili della stessa specie, associate secondo un piano determinato.

E' merito altissimo dei moderni mezzi tecnici di ricerca biologica, adunque, l' aver dato la possibilità di rivolgere lo sguardo indagatore sul mondo del piccolissimo e quindi presumibilmente, sulle prime manifestazioni della Vita. Ma la possibilità di applicare il principio della interpretazione finalistica, secondo il pensiero di F. Delpino, continua ancora in questo settore e certamente continuerà, finchè ci saranno forme e strutture da rilevare nel mondo dei viventi. Questa è la Biologia vegetale del nostro tempo: una Biologia che su i novissimi oggetti di studio applica sempre il medesimo criterio che già scaturisce dalla semplice, ovvia, spon-

---

[1]) Staudinger Magda. *Molekulkolloide und lebende Materie.* « Scientia », XII, 1954.

tanea osservazione ad occhio nudo, seguita dalla debita interpretazione. Essa ha cambiato nome; si è enormemente estesa in superficie e profondità, perchè contempla ora tutti i Viventi, uomo compreso; ma il suo spirito è rimasto lo stesso che la animò agli albori, quando soltanto i fiori e la forma delle foglie e dei fusti e le loro metamorfosi fornirono il primo materiale da studio. Epperò essa è pur sempre quella Scienza fascinosa che parla alla fantasia prima ancora che alla mente, non già certamente perchè gli Ecologi moderni scrivano romanzi, ma perchè la Natura vivente che fornisce il materiale da studio è davvero incredibilmente fantastica e varia.

Ma forse il tratto più caratteristico della personalità di Federico Delpino è quello che è rimasto indelebilmente fissato dall'opinione che Egli ebbe della funzione umana della scienza. Esso senza dubbio emerge già dal brillante destino che ebbe la sua creatura prediletta, la Biologia vegetale, che abbiamo sommariamente tratteggiato; ma in molti altri dei suoi scritti a intonazione filosofica Egli più o meno esplicitamente indicò qual'è la suprema funzione della scienza nella vita umana. Vediamo pertanto brevemente se e come lo stato odierno dello sviluppo scientifico e tecnico dà ragione alle presunzioni delpiniane di mezzo secolo fa.

Chiunque sente oggi più o meno chiaramente che il progresso scientifico può dirsi palese e veramente effettivo solo quando è accompagnato da applicazioni vantaggiose alla vita pratica dei popoli. Generalmente le due cose vanno di conserva, a condizione, bene inteso, che il libero lavoro della ricerca scientifica sia opportunamente volgarizzato. Ora la volgarizzazione scientifica è possibile quando appunto sussiste nel popolo un generico diffuso desiderio di apprendere; la condizione necessaria cioè a che le conoscenze scientifiche si trasferiscano rapidamente da un cervello all'altro esercitandovi una funzione educatrice e formativa della coscienza dei popoli e siano al tempo stesso il germe fecondo delle pratiche applicazioni. Tanto cospicuo pertanto ci appare il progresso scientifico quanto più si presenta all'attenzione del pubblico sotto la veste brillante delle utili invenzioni; talchè spesso noi siamo indotti a confondere in un unico senso di ammirazione la Scienza, causa prima creatrice, con la Tecnica, ingegnosa attuatrice materiale delle idee scientifiche. Dirò anzi di più: molto spesso lo splendore delle realizzazioni tecniche oscura del tutto il merito della idea creatrice originaria. Ora nel campo della Biologia, a cui noi c'interessiamo in particolar modo, le applicazioni utili riguardano essenzialmente l'Agricoltura e la Medicina. L'una, come è noto, ha il compito di fornire all'umanità gli alimenti necessari alla sua sussistenza e ogni altro bene necessario o semplicemente adatto ad abbellire l'esistenza dell'uomo sulla Terra; l'altra è l'arte di conservare la salute

---

[3]) Scanga F. *La cellula batterica*. Roma, Einaudi, 1954.

mediante la lotta contro le cause nemiche della vita umana. Ed infatti la Agricoltura è sempre stata ed è ancor oggi un grandioso esperimento di ecologia e di fisiologia vegetale, che si rinnova ogni anno in tutti i paesi civili del mondo; ma nei nostri tempi la produzione agraria dei vari paesi del mondo è stata di gran lunga migliorata ed aumentata grazie alla introduzione di nuove razze delle tradizionali specie di piante coltivate, razze che rappresentano il frutto di conoscenze di Genetica maturate in Laboratorio e successivamente trasferite e sperimentate in mille maniere nel campo pratico da intelligenti e pertinaci Agricoltori. Anche gli allevamenti zootenici si avvantaggiano ai nostri giorni di un gran numero di conoscenze biologiche sperimentali, quale ad es. quelle sulla fecondazione artificiale degli animali domestici maggiormente utili, nell' interesse del miglioramento e dell' incremento della produzione dei beni di consumo da essi forniti. Quanto alla Medicina, mi sembra superfluo insistere qui sul suo schietto fondamento biologico, essendo la conoscenza scientifica del vivente la base prima ed insostituibile di qualunque tentativo di intervento dell' uomo nel senso sopra espresso di difendere la salute umana; e perciò ci limiteremo qui a ricordare le due più cospicue scoperte del nostro tempo, quella dei vaccini e quella degli antibiotici; scoperte, ripetiamo, di squisito ed esclusivo carattere biologico, anche se, è giusto riconoscerlo, sono stati i Chimici successivamente a perfezionare le relative preparazioni pratiche e rendere possibile la fabbricazione su scala mondiale dei preziosi farmachi relativi. Ma siamo sempre lì: è rarissimo che sia lo stesso scienziato a curare le applicazioni utili delle sue scoperte. Occorre che al colpo d' ala del genio, alla felice interpretazione di un fatto naturale, talora apparentemente banale, talora anche verificatosi mille volte, ma passato inosservato, segua quella associazione d' idee necessaria alla dilatazione della conoscenza originaria, la qual cosa invero non può verificarsi se non mediante la volgarizzazione.

Reciprocamente, il progresso scientifico alla cui fonte sta la libertà e la nobiltà dell' idea sovrana, si alimenta successivamente delle stesse brillanti realizzazioni tecniche; invero la tecnica è quasi sempre, a sua volta, madre feconda di nuove idee, che pertanto si propagano, dilatandosi di cervello in cervello, quasi come una reazione a catena. Ma a questo punto si rivela la natura fondamentale egoista dell' uomo; quando cioè esso viene in possesso di un qualsiasi bene utile e pratico. E non diversamente che nei singoli individui, accade anche negli aggregati sociali umani di livello più o meno alto, a cominciare da quello della nazionalità fino a quello più basso delle singole caste, delle tribù e perfino delle famiglie nell' ambito della stessa nazionalità, che le applicazioni delle Scienze tendono a costituire un privilegio egoistico. Un grande numero di conoscenze scientifiche e di invenzioni pratiche, dai tempi più remoti,

hanno avuto importanza per una finalità difensiva degli aggregati sociali stessi e del territorio da essi occupato, sia contro le forze ostili della Natura, sia contro altri aggregati sociali umani, vicini o lontani coi quali i primi venivano in contatto e prima o poi fatalmente entravano in un regime di concorrenza vitale. Per questa ragione ancor oggi le ricerche scientifiche in alcuni domini particolari, almeno in un primo tempo, sogliono essere protette dal segreto, cioè da una istintiva espressione di quel sentimento di gelosia egoistica che giace in fondo all' animo umano. Nessuna Scienza è immune da questo originario movente egoistico. Le scoperte scientifiche e le applicazioni utili della Biologia, della Chimica, della Fisica raramente hanno servito fin dall' origine ad una funzione benefica veramente universale, come vorrebbe idealmente l' universalità della Scienza; molte di esse, anzi, al contrario, furono concepite unicamente nell' intento di fare il maggior male possibile ai concorrenti nell' uso dei medesimi beni del mondo. Tale è la condizione di Natura, alla quale è possibile la sopravvivenza e l' affermazione sulla superficie della terra di quel ramo della discendenza di Adamo, cui è assegnato il compito di perpetuare la specie umana; poichè non tutti i rami di questa discendenza, per quel che sappiamo, sono sopravvissuti, ma si è affermato solo quello costituito dagl' individui più forti, più capaci intellettualmente ed anche più spregiudicati spiritualmente. Meno che mai in questo particolarissimo settore dell' evoluzione sarebbe possibile attribuire al caso la funzione di fattore della selezione di una particolare discendenza dal resto degl' individui della specie umana; questa particolare discendenza è stata invece l'oggetto di una designazione che noi in termini naturalistici esprimiamo dicendo che il mondo è stato conquistato da quella parte dell' umanità che non solo ha saputo trionfare sulla materia ostile e sui fenomeni violenti della Natura stessa, ma ha saputo vincere la concorrenza contro gli altri Viventi e contro i suoi stessi simili, sovrapponendosi ad essi, assorbendoli o anche sterminandoli.

Questo, è bene rilevare, è l' aspetto prettamente naturalistico della Storia della Scienza; dal punto di vista biologico, ossia obbiettivamente scientifico, si può interpretare il desiderio di sapere dell' uomo e quindi il sorgere della Scienza come una delle più caratteristiche armi utili alla selezione, all' affermazione e quindi alla sopravvivenza della particolare discendenza di questa specie di vivente che è l' uomo. Sotto questo punto di vista il lavoro scientifico e la organizzazione della ricerca tecnica ci appaiono come una necessità di vita di detta specie di vivente; è il prezzo che l' uomo paga per la conservazione e l' aumento dei beni e dei comodi necessari al genere particolare di esistenza che egli chiama «civile» ed a cui non può più rinunziare. Tanto è sentita la necessità della ricerca scientifica che nelle Nazioni civili moderne sono ora sorte delle organiz. zazioni apposite per questo fine ed è anzi lo Stato che si preoccupa di

tale organizzazione. Quanto all' Italia è proprio di questi giorni la proposta di creare addirittura un Ministero della ricerca scientifica. Nelle Nazioni civili moderne è quindi funzione di primaria importanza quella di tramandare il patrimonio delle conoscenze scientifiche con gelosa cura, di generazione in generazione, come un tesoro inestimabile; e nella storia della Scienza che così si tramanda è facile rilevare che talune conoscenze hanno radici abbastanza antiche, in modo da potersi considerare come sviluppi di nozioni possedute « ab antiquo », forse anzi sorte con l' Uomo civile stesso, ovvero insegnate e trasmesse da un popolo all' altro mediante i viaggi, le guerre, le invasioni, fenomeni tutti di carattere ecologico, mentre altre conoscenze sembrano invece acquisizioni del tutto nuove, non trovandosi, almeno in apparenza, traccia di alcunchè di analogo nelle conoscenze antiche. Tuttavia anche in questo caso si può sempre presumere che le conoscenze antiche abbiano per lo meno fornito la base necessaria, anche indirettamente, alla loro formazione.

Tutto questo, ripetiamo, è l' aspetto prettamente naturalistico della storia della Scienza nei suoi rapporti con l' evoluzione dell' uomo; è quindi uno dei capitoli più interessanti della Ecologia umana moderna, studiata col metodo delpiniano della interpretazione a sfondo filosofico. Ma, data la particolare natura del vivente studiato, non si può dimenticare che nell' uomo accanto alle forze naturali, operano anche altre forze che non hanno riscontro nella Ecologia degli altri viventi e che hanno una grandissima importanza determinante sulla sua condotta. Alludiamo alle forze, ai moventi spirituali, contrassegno inconfondibile di quella discendenza umana designata ed attualmente operante sulla superficie della terra. Certi atti della sua vita non si possono invero studiare coi metodi scientifici positivi, non s' inquadrano nel dominio delle Scienze naturali, perchè discendono da un attributo del vivente umano attuale che lo elevano di mille cubiti al di sopra di qualsiasi altro vivente. Sono tali il sentimento della giustizia, della bontà, della carità, dell' amore per i propri simili; tali sentimenti, vincendo l' innato egoismo, portano a sovvenire i poveri, i deboli, gli umili. Come si vede, si passa in tal modo quasi insensibilmente, dalla Ecologia umana, che è una delle Scienze naturali, alle Scienze morali. E non si può non rilevare che dall' atomo, attraverso le macromolecole, attraverso le minime ed ancor poco conosciute unità della organizzazione vivente ultramicroscopiche, passando per la cellula, per l'organismo vegetale od animale multicellulare, fino alle strutture che sono sede delle più nobili funzioni, è tutta una catena ininterrotta di ansiose inchieste che l' uomo continuamente fa sull' universo che lo circonda; catena su cui solo per ragioni pratiche, direi quasi scolastiche, egli pone, a tratti determinati, dei diaframmi, per costituire dei domini di attività particolari, ma da ogni punto della quale emerge la impressionante conformità di tutte le cose, dalle infinitesime, alle infinite.

La condotta dell' umanità civile moderna è come un compromesso fra le forze operanti della intelligenza e quelle dello spirito; fra il lavoro del cervello e quello del cuore; fra i dettami della ragione e le esigenze del sentimento. Uno dei problemi che stanno al confine fra questi due domini è quello della giustizia distributiva dei beni disponibili in Natura. E' questo un problema ecologico e morale al tempo stesso. Nell' umanità attuale in continuo aumento numerico per lo strabbocchevole aumento delle nascite e per le sempre nuove brillanti vittorie nella lotta contro le cause di morte, il compito della distribuzione dei beni necessari alla vita non potrebbe che essere organizzato scientificamente, se si vuole che lo incremento della popolazione umana sia contributo al progresso della sua civiltà e non alla miseria ed alla degradazione della personalità umana. È necessario perciò che alcune delle più squisite funzioni del cuore siano controllate, organizzate su una scala vasta e razionale; epperò la carità, l' assistenza sociale non sono più attività che possono essere lasciate alla iniziativa del singolo benefattore. L' intervento della Scienza in questo settore è indispensabile, così come leggittimo è l' intervento nello studio dell' altro termine del massimo problema attuale della Ecologia umana: quello che ha per oggetto il controllo sulle nascite, anche nella specie umana, così come da tempo si attua nelle specie animali e vegetali.

Insomma, il bisogno della collaborazione, il sentimento della necessità della integrazione delle qualità individuali della specia umana per la ricerca di mezzi di sussistenza sempre più perfetti e completi, sono l' espressione di una spiritualità, di una forza che trascende l' interesse contingente del singolo individuo. E nella realtà pratica, questo bisogno, questo sentimento sono illuminati e riscaldati dalla esperienza scientifica, dalle infinite risorse della Tecnica ingegnosa, suscitando la creazione di provvidenze e della stessa organizzazione della collettività, che la trasforma in un' unica entità di ordine superiore. Ne abbiamo cospicui esempi pratici nella organizzazione di molte grandi industrie moderne, nelle quali spesso una parte dell' utile viene reimpiegato per finalità morali, per il benessere delle singole unità lavorative, col risultato di centuplicare in tal modo le energie produttive.

Noi oggi chiediamo alla Scienza molto di più di quel che le si chiedeva anche solo 50 anni fa. Febbrile è pertanto, in ogni settore delle esigenze umane, la ricerca dei mezzi atti a sodisfarle, sia incrementando e perfezionando quelli già noti, sia creandone addirittura di nuovi. Per questo la sperimentazione dei nostri tempi, in ogni settore scientifico, si distingue per la sua meticolosa organizzazione capillare. Per questo nella ricerca scientifica attuale si ha l' impressione che non bisogna perdere tempo. Nelle varie Nazioni civili tale lavoro viene pianificato, facendo appello alla divisione di lavoro, alla collaborazione di braccia e cervelli, all' impiego di mezzi ingenti, senza badare a spese. Ma poichè accanto a ogni proposito di

bene si cela sempre il pericolo del male, purtroppo nel far questo assai spesso si cade nell'errore, in un errore, si direbbe, per eccesso. Non è raro infatti che si esageri, nelle varie collettività civili, nell'organizzare una tecnica materialistica, unilaterale, burocratica, che perde ben presto di vista la nobiltà dell'idea. Ma purtroppo lo sviluppo tecnico che discende dalla idea scientifica tende, come abbiamo detto, a sua volta ad influenzare lo spirito scientifico. E questo nostro tempo segna realmente per ragioni storiche, sociali e politiche, una delle più caratteristiche e pericolose oscillazioni dello spirito scientifico verso le posizioni dell'orgoglio e dell'egoismo, che prima o poi fatalmente conducono al fallimento di quella Scienza che si è voluta asservire aprioristicamente alla politica o di quella tecnica che si è creduto di organizzare burocraticamente.

Federico Delpino fu uno degli scienziati-filosofi che nella Scienza anzi tutto vedono un mezzo di elevazione morale, una scuola di educazione; forse all'insorgere di questa sua convinzione fortemente influì la natura stessa della Scienza da Lui professata. Egli pertanto affermò la priorità, la indiscutabile preminenza del giudizio, della interpretazione finalistica di ogni dato di fatto e di ogni fenomeno naturale rilevabile, sia con l'osservazione diretta, sia — possiamo oggi aggiungere noi con sicurezza — con l'occhio armato di mezzi atti a potenziarlo. Ai suoi tempi grande importanza avevano ancora gli studi biologici per i quali era sufficiente l'osservazione ad occhio nudo; e ciò spiega perchè suo Laboratorio preferito fu il giardino, dove passava lunghe ore seduto accanto a qualche interessante o nuovo soggetto botanico in fiore, ad aspettare e sorvegliare l'arrivo ed il comportameuto dei pronubi. A noi, abituati all' intenso lavoro dei Laboratori modernamente attrezzati ed all'uso di mezzi fisici e chimici di ricerca, questo ricordo forse può fare sorgere un sorriso sulle labbra; ma — astrazion fatta dai novissimi capitoli della Biologia a cui ho fatto cenno — non si può dire in verità, che oggi non esistano più fenomeni naturali osservabili ad occhio nudo e, più ancora che questo, bisognosi di essere rettamente interpretati. Il metodo biologico delpiniano oggi si è esteso a tutta la Morfologia, a tutta la Fisiologia, perchè anche attraverso il sussidio dei mezzi atti a potenziare l'occhio, i fatti della Natura debbono passare al vaglio del giudizio dentro quel crogiuolo che è il cervello umano. Piccolo o grande che sia questo fatto, facile o difficoltosa ne sia l'osservazione, sia o no palese il rapporto che esso ha con altri fatti precedenti, esso va sempre interpretato, cioè spiegato nei suoi termini umani.

L'uomo, l'insaziabile scrutatore delle cose più intime della Natura con mezzi sempre più penetranti, rimane pur sempre all'esterno delle cose che scruta; ed anche quando riesce ad imitare in Laboratorio i fenomeni che cadono sotto la sua interessata curiosità, allo scopo di meglio conoscerli e controllarli, esso è pur sempre fuori, ontologicamento parlando, dei fatti e dei fenomeni, e tutto ciò che può concludere dai suoi esperimenti non

è che una interpretazione attuale, cioè in funzione della sua attuale capacità d'intendere. Forse che la perfetta conoscenza che noi oggi abbiamo del fenomeno del fuoco, nei suoi termini fisici e chimici, ha risolto il problema dell'anima, la cui essenza nei sistemi filosofici degli Antichi, da Eraclito agli Stoici, si identificava con quel fenomeno grandioso e terrificante quanto misterioso per essi? E, a tanti secoli di distanza, si potrebbe seriamente pensare che l'imitazione dei processi nervosi e psichici per mezzo delle macchine elettroniche possa fornire qualche cosa di più che una pallida analogia con l'ordine vitale dei fenomeni stessi? Non credo che i Cultori di Cibernetica pensino seriamente di utilizzare questa novissima Scienza per lo studio e la soluzione di problemi di fisiologia e psicologia. Sta però di fatto che le macchine elettroniche eseguono assai meglio e più rapidamente determinati compiti per i quali sarebbero necessari dei cervelli umani. Per questo esse sono chiamate anche «cervelli elettronici», ma molto impropriamente, perchè, invero, fra una macchina elettronica ed il cervello dell'idiota più stupido (a parte la qualità del lavoro prodotto) sta questa non piccola differenza: che il cervello dell'idiota lavora spontaneamente, mentre quello elettronico lavora se e quando e come vuole il suo padrone. In questa divina libertà, in questa inimitabile spontaneità degli atti della Vita sta la incolmabile soluzione di continuità fra i due mondi. Fra le più audaci realizzazioni sperimentali intese a imitare la essenza della vita e la più umile organizzazione vivente, vegetale od animale, passa la stessa differenza che v'ha fra la imagine ripresentata da uno specchio terso e l'oggetto reale che crea quella immagine. Noi la vediamo realmente, ci sembra di possederla, vorremmo quasi afferrarla, ma non si tratta che di una parvenza, mentre della esistenza reale dell'oggetto non possiamo che prendere atto. Ciò perchè noi siamo ad un tempo oggetto della natura e soggetto pensante, e quindi ci troviamo nella impossibilità di creare una Scienza assolutamente obbiettiva, cioè al di fuori di qualsiasi esperienza soggettiva, che necessariamente modifica un poco la realtà obbiettiva [1]); e tutto quindi va misurato col metro della natura umana, così come appunto c'insegnò Federico DELPINO, Scienziato spiritualista.

---

[1]) CAHEN G. — *De la Science à l'Homme*, «Scientia», II, 1955.

BIBLIOGRAFIA SU FEDERICO DELPINO E SULLA SUA OPERA BOTANICA (1)

Onoranze a Federico Delpino nel suo settantesimo compleanno (Napoli, 17 Dicembre 1903). Palermo, Tipografia Priulla, 1904.

FR. LUDWIG, *Federico Delpino und die Pflanzenbiologie*. Beilage zu den Greizer neuesten Nachrichten, N. 296 (23 Dicembre 1903) (ristampato nel fascicolo per le onoranze s. c.).

A. BORZI, *Federico Delpino*. Discorso commemorativo letto nella prima adunanza della Riunione generale della Società Botanica Italiana in Vallombrosa il 2 settembre 1905. Pubblic. in « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. XII, N. 4, ottobre 1905.

A. BORZI, *Commemorazione del Socio nazionale Federico Delpino*, in « Atti della R. Accademia dei Lincei », Novembre 1905.

FR. CAVARA, *Commemorazione di Federico Delpino*, letta all'Accademia Gioenia di Scienze Naturali il 31 Maggio 1905. Catania, 1905.

FR. CAVARA, *Federico Delpino*. Annuario della R. Università degli Studi di Napoli per l'anno 1905-06. Napoli, 1906.

* O. PENZIG, *Commemorazione di Federico Delpino*, in « Malpighia », vol. XIX (1905), pag. 294, con Bibliografia e ritratto.

* O. PENZIG, *Federico Delpino*, in « Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft », vol. XXIII, 1905, con Bibliografia.

L. PICCIOLI, *Federico Delpino* (senza data e luogo di stampa).

L. MACCHIATI, *Cenno biografico del Prof. Federico Delpino*. Savona, Tip. Bertolotti e C., 1905.

O. COMES, *Federico Delpino*, in « Rend. dell'Accad. delle Scienze Fisiche e Matem. di Napoli », serie III, vol. XI, fasc. 5-6 (1905).

* F. MORINI, *Commemorazione di Federico Delpino*, letta nell'adunanza del 28 Maggio 1905 alla Reale Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna, in « Rend. Accad. Sc., etc. », N. s., vol. IX (1904-05), pp. 113-14 5e Bibliografia.

A. TROTTER, *Federico Delpino*, in « Marcellia », Vol. IV, 1905, P. XX.

G. B. DE TONI, *Federico Delpino*, in « La Nuova Notarisia », serie XVI (1905), pag. 125 ed in « L'Università Italiana » del 1905.

S. SOMMIER, Nel Bollettino della Società Botanica Italiana, 1905, p. 167.

G. LOPRIORE, In « Atti del Congresso intern. di Vienna » del 1905.

* G. BRIOSI, *In ricordo di Federico Delpino*, in « Atti dell'Istituto Botanico dell'Univ. di Pavia », II serie, vol. X, Milano, 1907, con Bibliografia e ritratto.

M. GEREMICCA, *L'opera botanica di Federico Delpino*, esposta criticamente, Napoli, 1908, in « Boll. della Soc. dei Naturalisti di Napoli », vol. XXI, 1907.

A. ANILE, *Commemorazione di Federico Delpino*, in « Annuario scientifico industriale del Treves », A. 59, Vol. II.

A. ANILE, *Vigilie di Scienza e di Vita*, Bari, Laterza, 1911. Cfr.: La poesia e la Scienza dei fiori, pp. 155-163; Pensieri di un Biologo vegetale (Federico Delpino), pp. 165-170.

---

(1) Sono indicati, fra gli scritti qui riportati, con un * quelli che contengono l'elenco completo delle pubblicazioni di F. DELPINO.

A. Anile, *Conferenza su Federico Delpino*, tenuta in Chiavari il 2 ottobre 1922 (Tip. F. Devoto), riprodotta nel volume: « Per la cultura e per la Scuola ». Bari, Laterza, 1922, pp. 99-120.

B. Grassi, *I progressi della Biologia e delle sue applicazioni pratiche conseguiti in Italia nell'ultimo cinquantennio*. Roma, Tip. R. Accad. dei Lincei, 1911, pp. 91-95.

F. Balsamo, *Botanici e Botanofili napoletani*, in « Boll. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli », t. III, 1913, pp. 55-57.

A. Issel, *Federico Delpino e Antonio Piccone, botanici liguri*, in « Atti della Società ligustica di scienze nat. e geogr. », Genova, Vol. XXV (1914), pp. 20-27.

Fr. Nicolosi-Roncati, *Pagine di Biologia vegetale. Antologia Delpiniana*, in « Biblioteca di Scienza per tutti », N. 2, Milano, Sonzogno, 1919, pp. XX-161.

Seb. Timpanaro, « *Leonardo* ». Pagine di scienza. I ediz. Mondadori per le scuole medie, Milano, 1926, pp. 183-208 e 422-425.

A. Patroni, *Cenno biografico su Federico Delpino*, in « Annuario del R. Liceo Fed. Delpino », 1930-31, Chiavari, Tip. Esposito.

A. Ferretto, *Il distretto di Chiavari*, Parte I. Cfr.: *Un Botanico chiaverese e i suoi contributi per la Biologia vegetale*, pp. 321-328, Chiavari, Tip. Colombo, 1928.

F. Cortesi, *Federico Delpino*, in « Enciclopedia italiana », Vol. XII, 1931.

A. Cremona-Casoli, *Il primo centenario della nascita di Federico Delpino*, in « Il Solco fascista », Reggio Emilia, a. VI, N. 274 (18 Nov. 1933).

Ed. Broglio, *Nel I centenario di Federico Delpino*, in « La Semente », Rivista ligure di Agricoltura, Genova, a. XXX, Nov. 1933.

A. Beguinot, *Il centenario di un grande Biologo ligure*, in « Giornale di Genova », n. 302 del 21 Dicembre 1933.

A. Beguinot, *Onoranze a Federico Delpino*, in « La Ricerca scientifica ed il Progresso tecnico dell'economia nazionale », Roma, Ministero dell'Econ. Naz., a. V, Vol. I, N. 3, 15 febbraio 1934, pag. 178. (Si vegga ancora di A. Beguinot, *La Botanica*, Guide I.C.S., Roma, Istit. Propag. Cultura Italiana, 1920, p. 13 e 18-21, ed alle voci Ecologia, Mirmecofile (piante), ecc. dell'Enciclopedia italiana).

E. Lanzarotto, *Liguri illustri: Federico Delpino, fondatore della Biologia vegetale*. Nel I centenario della sua nascita: 27 Dic. 1933, in « Il Lavoro di Genova », N. 307 del 28 Dic. 1933.

A. Baldacci, *Federico Delpino nel I centenario della nascita* (27 Dicembre 1833 - 14 Maggio 1905), in « Annuario della R. Università degli Studi di Bologna » per l'anno 1933-34, Bologna, 1934. (Cfr. dello stesso la Commemorazione pronunziata nell'adunanza del 14 Gennaio 1934 della R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna in occasione del centenario e dell'inaugurazione di un medaglione donato a quella Università dal dr. Casoni).

Elles, *Il centenario di uno Scienziato chiavarese: Federico Delpino*, nel Bollettino « La Madonna dell'Orto », Chiavari, gennaio 1934.

* *Federico Delpino*, in « Bullettino dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli », T. XII, 1934, con Bibliografia e ritratto.

* Città di Chiavari, *Onoranze rese a Federico Delpino* (27 dicembre 1833 - 14 maggio 1905), nel primo centenario della sua nascita, Chiavari, Tip. artistica L. Colombo, 1934. (Costituzione del Comitato e cronaca della cerimonia celebrativa; Discorso commemorativo su Federico Delpino e sulla sua opera botanica, dal prof. A. Béguinot; Note; Discorso su Federico Delpino cittadino chiavarese, del dott. comm. Augusto Delpino; Appendice: Telegrammi, Documenti, Bibliografia Delpiniana, ecc.).

Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa

Nota del socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(Adunanza del dì 7 maggio 1955)

SUNTO. — Rappresentata una data curva algebrica completa $C^{n,m}$, di ordine n e classe m, con una V_3^η di S_5, di ordine $\eta = n+m$, costituita da ∞^1 piani generatori, resta definito un *carattere singolare* μ ed un *carattere cuspidale* σ della curva completa, dati: l'intero μ dal numero delle coppie di piani generatori della V_3^η conspaziali e l'intero σ dal numero di tali coppie di piani generatori che sono, inoltre, infinitamente vicini. Con tali *invarianti proiettivi* μ e σ, della curva completa $C^{n,m}$, detto p il genere di questa, restano determinati due *invarianti birazionali* della c^n, luogo che determina $C^{n,m}$, completa, dati da:

$$\sigma - (n+m) = 4\ (p - 1)$$

$$2\mu + 3\sigma - (n^2 + m^2) = 8\ (p - 1).$$

I caratteri singolare μ e cuspidale σ si possono calcolare con le formole:

$$\mu = \sum r_j (r_j - 1) + \sum s_j (s_j - 1)$$

$$\sigma = \sum (v_j - 1), + \sum (v'_j - 1),$$

con i sommatori estesi a tutti i punti singolari di multiplicità r_j, e rette singolari di multiplicità s_j della $C^{n,m}$, a tutti i rami di ordine v_j di c^n e a tutti i rami di classe v'_j della curva inviluppo determinata da c^n. In particolare se la curva ha **d** punti doppi nodali, **k** punti doppi cuspidali, t tangenti doppie ed **i** tangenti di flesso, si hanno le formole:

$$\mu = d + k + t + i \quad .. \quad \sigma = k + i$$

NOTA. — La V_3^n di S_5 dà la prima rappresentazione complessa della curva biduale ottenuta prolungando nel campo biduale la curva algebrica complessa c^n. [1] La trattazione, come nella nota citata, è svolta indipendentemente dalla teoria delle algebre che ha dato luogo all' argomento.

---

[1] N. Spampinato, *La varietà dell' S_5 complesso determinata da una curva algebrica piana.* (« LA RICERCA », Istituto Editoriale Meridionale, Lezioni di Geometria Superiore, Vol. IX, Parte Terza, § 6).

1. — *Modello proiettivo nell' S_5 di una curva algebrica completa dell' S_2.*

Di un dato ente algebrico ∞^1, rappresentato nel piano complesso S_2 (x_1, x_2, x_3) da una curva algebrica c^n, irriducibile, di equazione:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

si ha un altro modello proiettivo considerando la curva algebrica *completa*, costituita dalla curva luogo-inviluppo che si ottiene associando a c^n (curva luogo) la curva inviluppo, di classe m, determinata dalla c^n stessa. Tale curva completa la indicheremo con $C^{n,m}$, e risulta costituita da ∞^1 coppie punto-retta appartenentisi (P, t) con P punto semplice di c^n e t retta tangente a c^n in P, e dalle posizioni limiti che può assumere una tale coppia (P, t) al tendere di P ad un punto multiplo di c^n, lungo un ramo di c^n avente per origine tale punto multiplo.

Nel caso $n = 1$ la retta c^1 non determina una curva inviluppo di classe $m > 0$, ma tale c^1, come curva luogo, determina una sola retta, congiungendo ogni suo punto con il punto infinitamente vicino posto in essa: la retta stessa. In questo caso la classe m della c è, pertanto, zero. Sicchè la *punteggiata* c^1 (come curva luogo) determina una curva completa $C^{1,0}$, di ordine $n = 1$ e classe $m = 0$.

Dualmente un ente algebrico ∞^1 già rappresentato nel piano S_2 da una curva inviluppo di classe m, si può considerare rappresentato dalla curva algebrica completa luogo-inviluppo che si ottiene associando a detta curva inviluppo la curva luogo costituita dai *punti di contatto* della curva inviluppo data. Si ha così [se qnesta curva luogo e di ordine n], una curva completa $C^{n,m}$, dello stesso tipo del precedente, solo che *nel primo caso è determinata da una curva luogo, nel secondo caso è determinata da una curva inviluppo*. Ma anche in questo caso occorre considerare il caso particolare che sia $m = 1$, cioè la curva inviluppo data sia fascio di rette. In questo caso si ha un sol punto di contatto: il centro del fascio, cioè l' ordine n nella curva luogo è zero. Sicchè il fascio di rette determina una curva completa del tipo $C^{0,1}$.

Le curve complete del tipo $C^{0,1}$ e $C^{n,1}$ le diremo *elementari*. Per ogni altra curva completa, determinata da una curva luogo, o inviluppo, irriducibile, $C^{n,m}$ si ha $n > 1, m > 1$.

Ciò premesso consideriamo in un S_5 proiettivo complesso un sistema di coordinate omogenee

$$(x_1, y_1 . x_2, y_2 x_3, y_3) \tag{2}$$

ed in S_5 i due piani S_2 ed S'_2 descritti dai due punti

$$P(\lambda, 0, \mu, 0, \rho, 0) \tag{3}$$

$$P'(0, \lambda, 0, \mu, 0, \rho), \tag{4}$$

cioè i due piani di equazioni, rispettivamente:

$$(3_1) \qquad y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = 0$$

$$(4_1) \qquad x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0.$$

Si noti che i punti P e P′ di coordinate (3) e (4) si corrispondono nella proiettività, fra S_2 ed S'_2 di equazioni:

$$(5) \qquad x_1 = y_1 \quad , \quad x_2 = y_2 \, , \, x_3 = y_3$$

assumendo in S_2 le coordinate (x_1, x_2, x_3) e in S_2 le coordinate (y_1, y_2, y_3).

Data nel piano S_2 (x_i) la curva c^n di equazione (1), consideriamo la curva completa $C^n,^m$ da essa determinata. Se (P, t) è una coppia punto-retta di $C^n,^m$, detta t' la retta di S'_2 corrispondente di t nella proiettività (5), la coppia (P, t') determina in S_5 il piano $\pi = Pt'$. In corrispondenza alle ∞^1 coppie (P, t) di $C^n,^m$ restano, pertanto, determinati ∞^1 piani $\pi = Pt'$ in S_5 costituenti una varietà V_3, avente in comune con S_2 la curva c^n e con un piano multiplo, di multiplicità m, in S'_2, dato che, detta c'^m la curva di S'_2 omologa di c^n per la proiettività (5), per un punto P′ di S'_2 passano m rette t', tangenti a c'^m. Ne segue che un S_4 passante per S'_2 seca la V_3, fuori dell' S'_2 contato m volte, in n piani generatori: quelli uscenti dagli n punti in cui la c^n è secata dalla retta intersezione di S_2 con detto S_4. La V_3 risulta perciò di ordine $n + m$. Si ha quindi:

La curva completa $C^n,^m$ *determina in* S_5 *una* V_3^{n+m} *costituita da* ∞^1 *piani generatori, intersecati da* S_2 *in una curva luogo di ordine* n, *e da* S'_2 *in una curva inviluppo di classe* m, *omologa della curva inviluppo di* S_2, *determinata dalla* c^n, *nella proiettività* (5). *Il piano* S'_2 *per la* V_3 *ha la multiplicità* m.

La V_3^{n+m} *costituisce, in* S_5, *un modello proiettivo della curva completa* $C^n,^m$; *di ordine* n *e classe* m, *del piano* S_2.

2. — *Equazioni della* V^{n+m}, *modello proiettivo della curva completa* $C,^m$.

Nel caso che la curva completa sia la $C^1,^0$ determinata da una retta r di S_2 di equazione

$$(6) \qquad a_1 \, x_1 + a_2 \, x_2 + a_3 \, x_2 = 0$$

considerata la retta r' di S_2 corrispondente di r nella proiettività (5), cioè la retta di equazione:

$$(6') \qquad a_1 \, y_1 + a_2 \, y_2 + a_3 \, y_3 = 0$$

la V_3^{n+m} che dà il modello proiettivo di detta $C^1,^0$ e l' S_3 ambiente del

fascio di piani che si ottiene proiettando da r' gli ∞^1 punti di r. Cioè è l'S_3 di S_5 intersezione dei due interpiani di equazioni (6) e (6'). Si ha perciò:

Le ∞^2 curve complete del tipo $C^{1,0}$ sono rappresentate dai modelli proiettivi costituiti dai fasci di piani aventi per assi le rette r' *di* S'_2, *e contenuti negli* S_3 *congiungenti coppie di rette* r, r' *di* S_2, S'_2 *corrispondentisi nella proiettività* (5).

Nel caso che la curva completa sia la $C^{0,1}$ determinata da un fascio di rette del piano S_2 col centro in un dato punto P, detto P' il punto di S'_2 omologo di P nella proiettività (5), gli ∞^1 piani Pt' con t' retta del fascio di S'_2 di centro P', costituiranno la V_3 in questo caso, però, il fascio di piani generatori della V_3 ha per asse una retta PP', appoggiata ad S_2 ed S'_2 in due punti corrispondenti nella proiettività (5). Nel caso precedente, invece, gli assi dei fasci di piani erano le rette di S'_2. Le rette $g = PP'$, assi dei fasci in questo secondo caso, costituiscono la W_3^3 rigata avente per generatrici le congiungenti le ∞^2 coppie di punti omologhi nella proiettività (5) fra S_2 ed S'_2. Si noti che un S_4 passante per S'_2 e secante S_2 in una retta r, seca la W_3, fuori di S'_2, nella rigata quadrica costituita dalle ∞^1 rette $g = PP'$ con P variabile in r, e P' omologo di P nella proiettività (5) e quindi variabile nella rette r per la (5). Intanto abbiamo:

II) *Le ∞^2 curve complete del tipo $C^{0,1}$ sono rappresentate da modelli proiettivi costituiti da fasci di piani aventi per assi la rette* $g = PP'$ *della rigata* W^3_3 *determinata dalla proiettività* (5), *e l'* S_3 *ambiente del fascio di asse* $g = PP'$ *costituito dallo spazio congiungente* P *con* S'_2.

Si noti che se un tale punto P ha le coordinate (2), l'$S_3 = PS'_2$ ha le equazioni:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda : \mu : \rho \tag{7}$$

e l'asse g del fascio ha l'equazioni parametriche:

$$x_1 = h\lambda \ , \ y_1 = k\lambda \ , \ x_2 = h\mu \ , \ y_2 = k\mu \ , \ x_3 = h\rho \ , \ y_3 = k\rho \tag{8}$$

a) *Nel caso che la curva complete* $C^{n,m}$ *sia priva di punti multipli*, nel qual caso è

$$m = n\,(n-1) \tag{9}$$

e quindi

$$n + m = n^2 \tag{10}$$

supposto che essa sia determinata dalla curva c^n di equazione (1), l'equa-

zione della tangente t a c^n in un punto P ha per coefficienti i valori assunti in P dalle derivate prime della forma $f(x_i)$ e quindi l'equazione della retta t' di S'_2, nelle incognite (y_i), omologa di t nella (5), è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} y_2 = 0 \tag{11}$$

con (x_1, x_2, x_3) coordinate del punto P fissato in c^n.

La (11) rappresenta in S_5 una ipersuficie di ordine n, avente come $(n-1)$ — plo il piano S'_2 di equazioni (4_1), e passante per il piano S_2 di equazioni (3_1). Il sistema delle due equazioni (1) e (11) rappresenta in S_5 una $V_3^{n^2}$ e precisamente la V^{n+m}, costituita dagli ∞^1 piani $\pi = Pt'$, che da il modello proiettivo della $C^{n,m}$ in S_5. Infatti un punto di un tale piano $\pi = Pt'$ di coordinate (2) deve avere le tre coordinate x_i soddisfacenti alla equazione (1) di c^n, e le tre coordinate y_i doddisfacenti all'equazione (11) di t', dato che un tale punto di coordinate (2) appartiene alla retta congiungente il punto (x_1, x_2, x_3) di S_2 con il punto (y_1, y_2, y_3) di S'_2. Si ha perciò:

III) *La curva completa* $C^{n,m}$ *determinata da una curva luogo* c^n *priva di punti multipli, e quindi con* $n + m = n^2$, *è rappresentata in* S_5 *da un modello proiettivo* V_3^{n+m} *di equazioni* (1) *e* (11), *essendo la* (1) *l'equazione di* c^n.

Si noti che nel caso $n = 1$, e la (1) data dalla (6), la (11) risulta data dalla (6') e la V_3 è l'S_3 di equazioni (6), (1'), come si era sopra notato.

b) N*el caso che la* c^n *sia dodata di punti multipli,* essendo

$$m < n\,(n-1), \tag{12}$$

risulterà

$$n + m < n^2. \tag{13}$$

In tal caso il sistema (1), (11) rappresenta un varietà $V_3^{n^2}$ che contiene la V_3^{n+m} costituita dagli ∞^h piani $\pi = Pt'$, come nel caso precedente, ma non coincide con questa varietà. Si spezzerà nella V_3^{n+m} e in una varietà V_3 di ordine $n^2 - n - m$, costituita da h $S_3^{(i)}$ se sono *h i punti multipli distinti della* c^n, diciamo M_i $(i = 1, 2, \ldots, h)$, *ciascuno contato s_i volte se la presenza del punto multiplo* M_i *fa abbassare la classe di* c^n *di* s_i *unità.*

Ciò segue dall'osservare che se nel punto P di c^n si annullano le derivate prime la (11) risulta identicamente soddisfatta e quindi tutto l'$S_3 = S'_2 P$ generatore dell'ipercono di S_5 di equazione appartiene alla V_3 di ordine n^2 di equazioni (1) e (11). La V_3^{n+m} ha invece dentro tale

$S_3 = S'P$ solo un numero finito di piani $Pt'_1, .. Pt'_q$ essendo $t'_1, ... t'_q$ le rette omologhe nella proiettività (5) *delle* q *rette tangenti distinte* a c^n nel punto multiplo P_i

[Nel caso che la c^n sia una curva con d punti doppi nodali e k punti doppi cuspidali sarà $s_i = 2$ per ogni punto nodale ed $s_i = 3$ per ogni punto cuspidale perchè un punto doppio nodale fa abbassase la classe di 2 unità, ed un punto doppio cuspidale l'abbassa invece di 3].

L'intero s_i si dirà la *multiplicità completa del punto multiplo* M_i della curva completa $C^{n,m}$ per notare che un tale punlo multiplo fa abbassare la classe $m = n(n-1)$ [del caso generale] di s_i unità. Ne segue che si ha. in ogni caso, fra gl' interi $n, m, s_1, .., s_h$ la *relazione fondamentale :*

$$n + m = n^2 - s_1 - s_2 - \dots - s_h . \tag{14}$$

che si ricava dalla formola che dà la classe di c^n:

$$m = n(n-1) - s_1 = s_2 - \dots s_h . \tag{15}$$

La (15) mette in evidenza che l'equazione tangenziale della c^n [di grado m] si ottiene in seguito allo spezzamento di un' equazione di grado $n(n-1)$ in una irriducibile di grado m ed in altre h equazioni, ciascuna potenza di un' equazione di un fascio di rette col centro in un punto multiplo M_i di c^n e un esponente s_i, che sta ad indicare di quante unità fa abbassare la classe della c^n la presenza di quel punto multiplo M_i.

Si noti esplicitamente che gli eventuali punti multipli infinitamente vicini al punto multiplo M_i (fissato fra gli h punti multipli *distinti* di c^n) *intervengono insieme al punto* M_i *nell'abbassamento della classe* e cioè nell' intero corrispondente s^i che sopra è definito come *multiplicità completa* di M_i. Si ha perciò:

IV). *La curva completa* $C^{n,m}$ *determinata da una curva luogo* c *di* S_2 *con* h *punti multipli distinti* M_i *di multiplicità* completa s_i $(i = 1, .., h)$, *è rappresentata in* S_5 *da un modello proiettivo* V_3^{n+m} *che insieme agli* h $S_3 = S_2 M_i$ *contati ciascuno* s_i *volte, è rappresentato dalle equazioni* (1) *e* (11), *essendo* (1) *l'equazione di* c^n. *L'ordine* $n + m$ *della* V_3 *è dato dalla* (14).

3. *Il fascio di ipersuperficie di* S_5 *determinato dalla curva completa* $C^{n,m}$.

Nella proprietà IV) del n° 2 è stato messo in evidenza che la V_3^{n+m}, costituente il modello proiettivo della curva completa $C^{n,m}$, insieme agli h $S_3 = S_2 M_i$ contato ciascuno s_i volte, essendo s_i la *muliplicità completa* del punto multiplo M_i per la c^n, è rappresentata in S_5 dal sistema delle

due equazioni (1) e (11) cioè *costituisce la* V_3^n *base del fascio di ipersuperficie di equazione:*

$$(16) \qquad \lambda f(x_1, x_2, x_3) + \mu \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) = 0$$

determinato da tali due ipersuperficie (1) e (11) di ordine n. Questo *fascio di ipersuperficie di* S_5 *si può considerare, pertanto, determinato dalla curva completa* $C^n,^m$, dato che nella sua equazione intervengono la forma $f(x_j)$ e la forma prima polare della terna (y_j) rispetto alla $f(x_j)$ che eguagliata a zero dà l'equazione della tangente nel generico punto (x_j) di c^n, nelle incognite (y_j).

Si noti che la prima ipersuperficie di S_5, di equazione (1), che insieme alla ipersuperficie (11) determina il fascio suddetto, è l'ipercono di vertice $S'_2\,(y_j)$ che si ottiene proiettando da S'_2 la curva c^n del piano $S_2\,(x_j)$, di equazione (1). La seconda ipersuperficie, di equazione (11), ammette come abbiamo già osservato, come semplice il piano $S_2\,(x_j)$ e come $(n-1)$plo il piano $S'_2\,(y_j)$. Vogliamo ora mettere in evidenza che:

I) *L' ipersuperficie di equazione* (11) *è costituita da* ∞^2 *piani generatori secanti in un punto l'* S_2 *ed una retta l'* S'_2 *e da* ∞^2 *superficie, sono i direttori, con il vertice in* S'_2 *e di ordine* $n-1$. *Essa risulta inoltre costituita da* ∞^3 *rette generatrici, appoggiate ad* S_2 *e ad* S'_2. *Per una generica* g *passa un piano generatore ed un cono direttore della ipersuperficie. Detti* P *e* Q' *i punti di appoggio di* g *su* S_2 *ed* S'_2, *e detti* P' *e* Q *i punti omologhi di* P *e* Q' *nella proiettività* (5), *il piano generatore passante per* g *è il piano* $\pi =$ P*t' congiungente* P *con la retta polare* t' *di* P' *rispetto alla curva* c'^n *di* S'_2, *omologa di* c^n *nella proiettività* (5), *ed il cono direttore passante per* g *ha per vertice* Q' *e si ottiene proiettando da* Q' *la* c^{n-1} *di* S_2 *prima polare di* P *rispetto a* c^n.

Per dimostrare le sudette proprietà della ipersuperficie (11) si noti che se è

$$(17) \qquad R\,(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$$

un punto di S_5 fuori di S_2 ed S'_2 la retta g di S_5 passante per R ed appoggiata ad S_2 ed S'_2 è descritta dal punto

$$(18) \qquad (\rho x_1, \sigma y_1, \rho x_2, \sigma y_2, \rho x_3, \sigma y_3)$$

al variare dei due parametri omogenei (ρ, σ), e si appoggia ad S_2 nel punto

$$(19) \qquad P\,(x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0),$$

e ad S'_1 nel punto

$$(20) \qquad Q'(O, y_1, O, y_2, O, y_3).$$

Si noti ora che sostituendo le (18) nella (11) si ha l'equazione

$$(21) \qquad \rho^{n-1}\,\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}y_3\right) = O.$$

Da questa relazione segue che se R appartiene all'ipersuperficie di equazione (11), tutta la retta $g = PQ'$, passante per R, appartiene all'ipersuperficie. Sicchè la (11) è composta con ∞^3 rette della congruenza delle ∞^4 rette di S_5 appoggiate ad S_2 ed a S'_2. Fissato in S_2 il punto P dato dalla (19), e supposto che in esso non si annullano le tre derivate prime di $f(x)$, la (11) rappresenta nel piano S_2 la polare t' del punto

$$(22) \qquad P'(O, x_1, O, x_2, O, x_3),$$

omologo di P nella proiettività (5), rispetto alla curva c'^n di S'_2 omologa di c^n nella (5), cioè di equazione

$$(23) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = O.$$

Se Q' è un punto qualunque di tale polare la (21) avrà il fattore in parentisi nullo e quindi sarà soddisfatta qualunque siano ρ e σ, cioè tutte le ∞^1 rette P Q' con Q' variabile in t' appartengono alla ipersuperficie (11), ed il piano $\pi = Pt'$ sarà un piano generatore della ipersuperficie stessa.

Fissato in S'_2 un punto Q' di coordinate (24), la (11) rappresenta, nel piano S_2, la c^{n-1} prima polare del punto

$$(24) \qquad Q(y_1, O, y_2, O, y_3, O)$$

omologo di Q' nella proiettività (5), rispetto alla c^n di S_2. Se P è un punto qualunque di tale c^{n-1} la (25) avrà il fattore in parentesi nullo e quindi sarà soddisfatta qualunque siano ρ e σ, cioè tutte le ∞^1 rette PQ' con P variabile in c^{n-1}, appartengono tutte alla ipersuperficie (11), ed il cono proiettando c^{n-1} da Q' sarà un cono direttore della ipersuperficie stessa.

Fissato R, e conseguentemente per quanto è sopra detto, il punto P in S_2 ed il punto Q' in S'_2, con la retta $g = PQ'$ passante per R, il piano generatore Pt' ed il cono direttore $Q'c^{n-1}$ sopra determinati, passano per $g = PQ'$ e quindi per R. Risulta perciò dimostrata la proposizione I).

Se, in particolare, supponiamo che P apparteaga a c^n (e quindi P' a c'^n), e sia semplice per c^n la t' sarà la tangente a c'^n in P', ed il piano $\pi = Pt'$ sarà il piano generatore della V_3^{n+m} uscente da P.

Se P è un punto multiplo di c^n la (11) risulta soddisfatta qualunque

siano le y_i e quindi la ipersuperficie conterrà tutto l' S_3 che congiunge P con l' $S'_2(x_j)$. Si noti che in questo caso P è un punto base della rete delle polari c^{n-1} dei punti del piano rispetto a c^n. La varietà base del fascio (16) sarà formata dalla $V_3^{n'm}$ e dagli h $S_3 \equiv S'M_i$ essendo $M_1, \ldots, M_h$ i punti multipli di c^n. Se diciamo s_i la multiplicità che ha un tale S_3 per la varietà base del fascio, deve essere

$$n^2 = n + m + s_1 + \ldots + s_h \tag{25}$$

è sarà s_i la multiplicità d'intersezione della c^n con la generica polare c^{n-1} *nel punto base* M_i *nella rete delle polari, cioè eguale alla multiplicità con cui il fascio di rette di centro* M_i *si stacca dalla curva inviluppo costituita da tutte le rette di* S_2 *che con la* c^n *hanno un gruppo* G_n *intersezione dodato di punto doppio.* L'intero s_i *è la multiplicità completa di* c^n *in* M_i. (n. 2). Si ha perciò, per la IV):

II) *La varietà base del fascio di ipersuperficie di* S_5 *determinato dalla curva completa* $C^{n,m}$ *è una* $V_3^{n^2}$ *contenente la* $V_3^{n'm}$ *che dà il modello proiettivo in* S_5 *della* $C^{n,m}$; *coincidente con questa nel caso che sia* c^n *priva di punti multipli; spezzata in questa* $V_3^{n'm}$ *ed in* h *spazi* S'_2M_i, *contati* s_i *volte, in corrispondenza agli* h *punti multipli* M_i *di* c^n *di multiplicità completa* s_i, *nel caso che la* c^n *sia dodata di punti multipli.*

NOTA. — E' bene notare esplicitamente che nel modello proiettivo dell' ente algebrico ∞^1, già rappresentato dalla curva c^n di S_2, e dalla curva completa $C^{n,m}$ determinata da c^n, costituito dagli ∞^1 piani generatori della $V_3^{n'm}$, di piani generatori rispondenti ad un punto multiplo M' di c^n ve ne sono (dentro l' $S_3 \equiv S'_2 M_i$ che si stacca dalla $V_3^{n^2}$) tanti quante sono le tangenti distinte della c^n in M_i. Se, per es: M_i è un punto doppio di tali piani rispondenti al punto doppio ve ne sono due o uno secondo che il punto doppio è nodale o cuspidale e l' $S_3 \equiv S'_2 M_i$ dalla $V_3^{n^2}$ *nel primo caso si stacca contato due volte, nel secondo caso contato tre volte,* essendo s_i eguale a 2 nel primo caso e a 3 nel secondo caso, perchè la c^n e la potare c^{n-1} di un generico punto del piano si secano in $n(n-1)$ punti fra i quali M_i conta per 2 nel primo caso, e per 3 nel secondo caso, sicchè *la multiplicità completa di una curva in un punto doppio nodale o cuspidale è* 2 *nel primo caso,* 3 *nel secondo caso.* Ciò è messo in evidenza nella formola di Plucker che dà la classe m di una c^n dodata di d punti doppi nodali e k punti doppi cuspidali:

$$m = n(n-1) - 2d - 3k. \tag{26}$$

In tal caso è

$$n + m = n^2 - 2d - 3k \tag{27}$$

e la varietà base $V_3^{n^2}$ del fascio (16) si spezza nella V_3^{n+m} che dà il modello proiettivo della curva completa $C^{n,m}$, nei d S_3 congiungenti S'_2 con i d punti doppi nodali contati ciascuno 2 volte, e nei k S_3 congiungenti S'_2 con i k punti doppi cuspidali, ciascuno contato 3 volte.

4. — *La rigata V_2^{2n} appartenente alla V_3^{n+m}.*

In ogni piano generatore $\pi = Pt'$ della V_3^{n+m} (N° 1) consideriamo la retta $g = PP'$ congiungente il punto P di c^n con il punto P' di c'^n corrispondente di P nella proiettività (5) (e quindi appartenente alla retta t'). Le ∞^1 rette $g = PP'$, al variare di P in c^n, costituiscono una rigata V_2^{2n}. Essendo t' la retta tangente a c'^n nel punto P' il piano $\pi = Pt$ è il piano congiungente la generatrice $g = PP'$ di V_2^{2n} con la tangente in P' alla direttrice c'^n di V_2^{2n}, e quindi è il piano tangente in P. Si ha perciò:

I) *La V_3^{n+m} contiene una rigata V_2^{2n}, costituita dalle ∞^1 generatrici* $g = P P'$ *con* (P, P') *coppie di punti di* c^n *e* c' *corrispondenti nella proiettività* (5).

I piani generatori della V_3^{n+m} sono i piani tangenti alla V_2^{2n} nei punti della direttrive c'^n del piano S'_2.

5. — *Coppie di piani conspaziali della V_3^{n+m}.*

Siano $\pi = Pt'$ e $\pi = P_1 t'_1$ due piani generatori della V_3^{n+m} di S_5 modello proiettivo della curva completa $C^{n,m}$ determinata dalla curva c^n di S_2. Saranno P e P_1 due punti di c^n e t', t'_1 le omologhe nella proiettività (5) fra S_2 ed S'_2 di due rette t, t_1 che dovranno essere tangenti a c^n nei due punti (semplici o multipli) P e P_1 rispettivamente.

Nel caso generico i due piani π e π_1 appartengono ad un iperpiano di S_5, perchè hanno un sol punto in comune: il punto di S'_2 intersezione delle due rette t' e t' in cui π e π_1 intersecano S'_2. In quali casi risultano π e π_1 con una retta in comune, cioè conspaziali? Si ha che:

I) *I due piani generatori $\pi = Pt'$, e $\pi_1 = P_1 t'_1$ della V_3^{n+m} risultano conspaziali quando e solo quando si verifica uno dei due casi:*

1° *Sia* $P = P_1$ *un punto multiplo di* c^n.
2° *Sia* $t = t_1$ *una tangente multipla di* c^n.

Infatti se è PP_1 la eventuale retta in comune che π e π_1 possono avere è la retta che essi secano nel piano S'_1, cioè in tal caso i due piani hanno una retta in comune qnando e solo quando è $t' = t'_1$. Se è $P = P_1$, e quindi $P' = P'_1$ (indicandi con P e P'_1 i punti di t' e t'_1 omologhi di P e P_1 in (5) i due piani π e π_1 hanno in comune la retta $g = PP' = P_1 P'_1$ e dovranno secare su S_2 due rette t' e t'_1, uscenti da $P' = P'_1$ (non sovrapposte affinchè π e π_1 non siano coincidenti). Ciò equivale ad affermare

che la c^n nel punto $P = P_1$ ha almeno due tangenti: le due rette t e t_1, cioè sarà P un punto multiplo di c^n. Nel primo caso, invece, la coincidenza delle rette $t' = t'_1$ porta di conseguenza la coincidenza delle due tangenti t e t' a c^n nei due punti *non sovrapposti* P e P_1 di c^n. Tale retta $t = t_1$ sarà, pertanto, una tangente multipla di c^n. Si ha perciò:

II) *Se i due piani generatori della* V_3^{n+m} *sono conspaziali la loro retta comune appartiene o al piano* S'_2 *o alla rigata* V_2^{2n}.

Ne caso particolare che la c^n sia dodata di soli punti doppi e rette doppie il numero di queste singolarità della curva completa $C^{n,m}$ è dato del numero delle coppie di piani generatori conspaziali della V_3^{n+m}. Fra queste coppie di piani hanno particolare importanza le coppie rispondenti ai punti doppi cuspidali e alle tangenti di flesso, cioè alle *coppie di piani generatori* π e π *della* V_3^{n+m} *che, oltre ad essere conspaziali, sono infinitamente vicini*. Se diciame σ il loro numero, l'intero σ risulta legato all'ordine $\eta = n + m$ della V_3 dalla relazione fondamentale

$$\sigma - \eta = 4\,(p - 1) \tag{28}$$

essendo p il genere della c^n, relazione che vale qualunque siano le singolarità della $C^{n,m}$ e che dimostreremo prima nel caso particolare che c^n sia dodata di soli punti doppi e rette doppie, e dopo nel caso generale. L'intero σ si dirà *carattere cuspidale* della curva completa $C^{n,m}$ e l'intero $\eta = n + m$ *ordine* della curva stessa $C^{n,m}$. La (28) mette in evidenza che *la differenza* σ η *fra il caratlere cuspidale e l'ordine curva completa* $C^{n,m}$ *è un invariante birazionale legato al genere* p *della* c^n, *che determina la* $C^{n,m}$.

6. — *Calcolo del carattere cuspidale* σ *della* $C^{n,m}$ *completa. Dimostrazione della* (28).

Sia c^n dodata di d punti doppi nodali, k punti doppi cuspidali, t rette doppie a punti di contatto distinti, ed i tangenti d'inflessione. In tal caso, per la definizione sovra posta, il carattere cuspidale σ della $C^{n,m}$ è dato da

$$\sigma = k + i. \tag{29}$$

In questo caso la relazione fondamentale (27) da dimostrare fra σ, l'ordine completo $\eta = n + m$ ed il genere p si ricava dalle formole di Plücker e dalla relazione che dà p in funzione di n, d e k, o dai caratteri duali m, t ed i. Invero dalle relazioni che danno il genere di c^n, o della curva inviluppo,

$$p = (n - 1)(n - 2) : 2 - d - k$$

$$p = (m - 1)(m - 2) : 2 - t - i$$

sommandole, dopo averle moltiplicate per 2, si ricava la relazione:

$$(30) \qquad 4\,p = (n-1)(n-2) + (m-1)(m-2) - 2d - 2k - 2t - 2i\,.$$

Ricavando, dalle due formole di Plücher

$$m = n\,(n-1) - 2d - 3k$$
$$n = m\,(m-1) - 2t - 3i\,,$$

gli interi $2d$ e $2t$ e sostituendo nella relazione (30) si ha:

$$4p = (n-1)(n-2) + (m-1)(m-2 + m - n(n-1) + 3k + n - m(m-1) + 3i - 2k - 2i =$$
$$= -2\,(n-1) - 2\,(m-1) + m + n + k + i = -n - m + 4 + k + i$$

Si ha perciò

$$4\,(p-1) = (k+i) - (n+m)$$

e, per le posizioni $k + i = \sigma, n + m = \eta$;

$$4\,(p-1) = \sigma - \eta\,,$$

cioè la 28).

Si noti che in questo caso la c^n di rami di ordine $v > 1$ ha solo quelli di ordine 2 aventi per origine i k punti cuspidali, e, dualmente, la curva inviluppo, di rami di classe $v' > 1$ ha solo quelli di classe 2 aventi per origini le i tangenti d' inflessione. In questo caso, perciò, il carattere cuspidale σ della curva completa $C^{n,m}$ risulta dato che da:

$$(31) \qquad \sigma = k + i = \sum (v_j - 1) + \sum (v'_j - 1)$$

con i sommatori estesi a tutti i rami di c^n di ordine $v_j = 2$ e a tutti i rami della curva inviluppo di classe $v_j = 2$. Ebbene la formola

$$(32) \qquad \sigma = \sum (v_i - 1) + \sum (v'_j - 1)$$

con i *sommatori estesi a tutti i rami* c^n di ordine $v_j > 1$, vale per calcolare *in ogni caso* il numero delle coppie di piani generatori della V_3^{η}, π e π_1 che oltre ad essere conspaziali, sono infinitamente vicini, perchè *se un ramo di* c^n, *è di un* ordine $v > 1$ *la tangente nell'origine* P *di tale ramo assorbe* v *tangenti delle* r *tangenti a* c^n *in* P, *se è* r *la multiplicità di* P *per* c^n. Queste v tangenti dànno: una coppia di tangenti infinitamente vicine, uscenti da P, se è $v = 1$, dànno, invece, $v - 1$ coppie successive di tangenti infinitamente vicine se è $v > 2$, ed in corrispondenza

ad ogni tale coppia si hanno due piani generatori della V_3^n conspaziali ed infinitamente vicini. Analoghe considerazioni si fanno per la curva inviluppo. Ne segue che *la formula* (32) *può servire per definire analiticamente il carattere cuspidale della curva completa* $C^n,^m$.

In questo *caso generale* per dimostrare la relazione fondamentale, (28) possiamo servirci delle relazioni che legano i caratteri n, m, p, v_j, e v_j

$$(33) \qquad 2n + 2p - 2 = m + \sum (v_j - 1)$$

$$(34) \qquad 2m + 2p - 2 = \mathrm{n} + \sum (v'_j - 1).$$

Sommando si ha

$$2\ (n + m) + 4p - 4 = n + m + \sum (v_j - 1) + \sum (v'_j - 1) = n + \mathrm{m} + \sigma$$

e quindi è:

$$4\ (p - 1) = \sigma - (n + m),$$

si ha cioè la relazione (28), essendo $n + m = \eta$. Raccogliendo si ha:

La differenza frá il carattere cuspidale σ *di una curva completa* [*dato dalla formola* (32) *per una curva a singolarità qualunque, o da* $\mathrm{k} + \mathrm{i}$ *da una curva a singolarità elementari*] *e l'ordine* $\eta = \mathrm{n} + \mathrm{m}$ *di una curva completa* $C^n,^m$, *è un invarante birazionale della curva* c^n *che determina la curva completa, legato al genere* p *di* c^n *dalla relazione fondamentale:*

$$\sigma - \eta = (p - 1)$$

7. — *Una caratterizzazione delle curve razionali complete.*

Dalla relazione (28) segue che è $p = 0$ quando e solo quando è $\eta > \sigma$ (precisamente $\eta = \sigma + 4$). Si ha perciò:

Le curve complete $C^n,^m$ *razionali sono tutte e sole quelle aventi l'ordine completo* $\eta = \mathrm{n} + \mathrm{m}$ *maggiore del carattere cuspidale* σ. *In tal caso è precisamente* $\eta = \sigma + 4$.

Si noti, in particolare che:

Per una conica completa $C^2,^2$ *è* $\eta = 4$, $\sigma = 0$

Per una cubica completa razionale, con un punto doppio nodale, $C^3,^4$ è $\eta = 7$ e $\sigma = 3$ (In questo caso la cubica ha la classe 4 ed ha tre flessi, ed essendo priva di punti doppi cuspidali, il carattere cuspidale $\sigma = k + i$ è 3).

Per una cubica razionale completa, con un punto doppio cuspidale,

$C^3,^3$ è $\eta = 6$ e $\sigma = 2$. (In questo caso la cubica ha la classe 3 ed ha un solo flesso e quindi il carattere cuspidale $\sigma = k + i$ è 2)

Per una quartica razionale completa $C^4,^m$ *è* $\eta = 4 + m$ *e quindi* $\sigma = m$.

Nel caso che sia dodata di soli punti doppi (d *nodali e* k = 3 — d *cuspidali*) *si hanno i seguenti quattro sottocasi:*

d	k	m	i	t	$\eta=4+m$	$\sigma=k+i$
3	0	6	6	4	10	6
2	1	5	4	2	9	5
1	2	4	2	1	8	4
0	3	3	0	1	7	3

$(m = \sigma)$

8. — *Una caratterizzazione delle curve complete di genere 1.*

Dalla (28) segue $p = 1$ quando e solo quando è $\eta = \sigma$. si ha perciò:

Le curve complete $C^n,^m$ *di genere* 1 *sono tutte e sole quelle aventi l'ordine completo* $\eta = n + m$ *eguale al carattere cuspidale* σ.

Si noti, in particolare che:

Per una *cubica ellittica completa* $C^4,^6$ è $\eta = 9$ e $\sigma = 9$ (In questo caso essendo la cubica priva di punti doppi ha la clase 6 ed è dotata di 9 flessi; il carattere cuspidale è pertanto $\sigma = k + i = 9$)

Pe una quartica ellittica completa $C^4,^m$ *si hanno i seguenti tre sottocasi:*

d	k	m	i	t	$\eta=4+m$	$\sigma=k+i$
2	0	8	12	8	12	12
1	1	7	10	4	11	11
0	2	6	8	1	10	10

$(\eta = \sigma)$

9. — *Una caratteriz azione delle curve vomplete di genere* $p > 1$.

Dalla (28) segue che è $p > 1$ quando e solo quando è $\eta < \sigma$. Si ha perciò:

Le curve complete $C^{n,m}$ *di genere* $p > 1$ *sono tutte e sole quelle aventi l'ordine completo* $\eta = n + m$ *minore del carattere cuspidale* σ.

In particolare:

Per una $C^{4,m}$ di genere $p > 1$ si hanno i seguenti tre sottocasi:

p	d	k	m	i	t	$\eta=4+m$	$\sigma=k+i$
2	1	0	10	18	16	14	18
2	0	1	9	16	10	13	17
3	0	0	12	24	28	16	24

$(\eta < \sigma)$

NOTA. — Si noti che le tre famiglie in cui si distribuiscono le curve complete in relazione ai tre casi $\eta > \sigma$, $\eta = \sigma$, $\eta < \sigma$, rispondenti ai tre casi $p = 0$, $p = 1$, $p > 1$, sono le tre famiglie in cui si distinguono le curve in relazione ai moduli; di non possederne alcuno (curve razionali), di possederne uno solo (curve di genere 1) di possederne $3\,(p - 1)$ (curve di genere > 1).

10. — *Carattere singolare della curva completa.*

Nei n' 5, 6, 7, e 8 ci siamo occupati delle coppie di piani conspaziali della $V_3^{n,m}$, con particolare riguardo alle coppie di piani generatori conspaziali *infinitamente vicini* il cui numero σ, definito *carattere cuspidale della* $C^{n,m}$ è risultato legato all' ordine completo $\eta = n + m$ e al genere p della $C^{n,m}$ dalla relazione (28). Vedremo ora che *considerando tutte le coppie di piani generatori conspaziali* si arriverà a definire un altro invariante proiettivo, che diremo *carattere singolare* μ, dato, nel caso che la curva sia dodata di soli punti doppi e sole rette doppie, dalla somma degl' invarianti proiettivi d, k, t, i, ed in generale dalla formola

$$\mu = \sum r_j(r_j - 1) + \sum s_j\,(s_j - 1) \tag{35}$$

se la curva è dodata di punti singolari di multiplicità r_j e di rette singolari di multiplicità s_j, formola che nel caso precedente dà precisamente la formola:

$$\mu = d + k + t + i. \tag{35'}$$

Vedremo che, mediante il carattere singolare μ, il carattere cuspidale σ, l'ordine n e la classe m della $C^{n,m}$, si calcola *un altro invariante birazionale di* $C^{n,m}$, *che risulta eguale* ad $8(p-1)$. Si ha precisamente :

$$(36) \qquad 2\mu + 3\sigma - (n^2 + m^2) = 8(p-1).$$

Tale invariante è pertanto il doppio dell' invariante birazionale $\sigma - \gamma_1$, cioè $\sigma - (n + m)$, che è eguale a $4(p-1)$, per la (28). Si noti esplicitamente che, mentre nella (28) interviene la somma di n ed m, nella (35) interviene la somma dei loro quadrati.

Per la proprietà I) del n° 5 nel caso che la curva sia dodata di soli punti doppi (nodali o cuspidali) e di sole tangenti doppie (a punti di contatto distinti o infinitamente vicini) il numero μ delle coppie di piani generatori della $V_3^{n,m}$ che risultano cospaziali è dato dalla (35). Nel caso generale, tenendo conto che ogni punto r — plo equivale ad $r(r-1)$ punti doppi e ogni tangente s — pla equivale ad $s(s-1)$ tangenti doppie, ci serviremo della formola (35) per definire analiticamente il carattere singolare μ della curva $C^{n,m}$ nel caso generale. Vedremo ora come si dimostra la relazione fondamentale (36).

Dalla formola che dà il genere p della curva luogo (o inviluppo) con i punti multipli di multiplicità r_i (e le rette multiple di multiplicità s_i) si ricavane le relazioni, duali l'una dall'altra :

$$2p = (n-1)(n-2) - 2\sum r_j (r_j - 1)$$

$$2p = (m-1)(m-2) - 2\sum s_j (s_j - 1)$$

Sommando queste due relazioni si ricava, per la posizione (35) :

$$4p = (n-1)(n-2) + (m-1)(m-2) - 2\mu,$$
$$4p = n^2 + m^2 - 3(n+m) + 4 - 2\mu.$$

Sostituendo ad $n + m$ il valore che si ricava dalla (28), cioè

$$n + m = \sigma + 4(p-1) = \sigma + 4p - 4$$

si ha :

$$4p = n^2 + m^2 - 3\sigma - 2\mu + 12p - 8$$

Da questa relazione si ricava la (36). Si ha perciò :

I) *Per una curva algebrica completa* $C^{n,m}$ *con il carattere singolare* μ ***ed il carattere cuspidale*** σ, ***l' intero***

$$2\mu + 3\sigma - (n^2 + m^2)$$

è un' invariante birazionale, legato al genere p *della curva dalla relazione*

$$2\mu + 3\sigma - (n^2 + m^2) = 8\,(p - 1).$$

Si noti che questo invariante è il doppio dell' invariante $\eta - \sigma = 4\,(p - 1)$.

Ne segue la relazione: (essendo $\eta = n + m$).

$$2\mu + \sigma = n^2 + m^2 - 2\,(n + m) \tag{37}$$

Si ha perciò:

II) *Fra l' ordine* n, *la classe* m, *il carattere singolare* μ *ed il carattere cuspidale* σ *di una curva algebrica* $C^n{}_m$ *intercede la relazione* (37).

NOTA. — Nel caso che la curva sia dotata di soli punti doppi e rette doppie, e quindi il carattere singolare μ dato dalla (35′) ed il carattere cuspidale σ dato da $k + i$, la relazione (37) da:

$$2\,(d + t) + 3\,(k + i) = n^2 + m^2 - 2\,(n + m). \tag{37'}$$

Questa relazione si può ricavare dalle formule di Plückner

$$m = n\,(n - 1) - 2d - 3k$$

$$n = m\,(m - 1) - 2t - 3i,$$

che sommate membro a membro dànno:

$$n + m = n^2 + m^2 - (n + m) - 2d - 3k - 2t - 3i$$

dalla quale si ricava la (37′).

Delle due formole di Plücker sopra considerate scritte nella forma:

$$m + n = n^2 - 2d - 3k,$$

$$m + n = m^2 - 2t - 3i$$

la prima mette in evidenza che dalla varietà $V_4^{n^2}$ di S_5, di equazione (1) e (11), sono staccati d S_3, rispondenti ai punti doppi nodali ciascuno contato due volte e k S_3, rispondenti ai punti doppi cuspidali ciascuno contata tre volte.

NOTA IIª. — Volendo dare un' analoga interpretazione alla seconda, conviene considerare in S_5 una *seconda varietà* V_3, *di ordine* m^2, *dalla quale si staccano* t S_4 *contati ciascuno 2 volte, ed* i S_4 *contati ciascuno* 3 *volte,* dando luogo ad una *seconda varietà* V_3 residua pure di ordine

$m + n$ e tale seconda coppia di varietà $V_3^{m^2}$ e V_3^{m+n} *deve provenire pure dalla curva algebrica* c^n *assegnata in* S_2, e precisamente da una seconda curva completa $C^{m,n}$ legata alla $C^{n,m}$ determinata da c^n. Di tale argomento ci occuperemo nel n° seguente, considerando anche il caso in cui la c^n sia dotata di singolarità qualunque.

11. — *Una* c^m *reciproca della curva inviluppo determinata da* $c^{n,m}$ *la curva completa* $C^{m,n}$ *ed il suo modello proiettivo nell'* S_5.

Nel piano S_2 (x_1, x_2, x_3) si consideri la retta r di equazione:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \tag{38}$$

e la terna $(a_1\ a_2\ a_3)$ come coordinate di r nell' S_2 *rigato.* Si fissi inoltre la reciprocità di equazioni

$$a_1 = x_1 \quad , \quad a_2 = x_2 \quad , \quad a_3 = x_3 \,. \tag{39}$$

La curva inviluppo, di classe m, determinata dalla curva luogo c^n assegnata in S_2, trasformata mediante la reciprocità (39), dà una curva luogo di *ordine* m, diciamo c_1^m, *e di classe* n. Questa curva luogo determina perciò una seconda curva completa, che indicheremo con $C_1^{m,n}$. Sicchè *mediante la curva data* c^n *restano determinate due curve complete: la* $C^{n,m}$ *e la* $C_1^{m,n}$ *la prima da* c^n, *la seconda da* c_1^m, *trasformata, mediante la* *reprocità* (39), *della curva inviluppo, di classe* m, *che inviluppa la* c^n.

Sia

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{40}$$

l' equaziòne di c_1^m, Associando alla (4) l' equazione

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3} y_3 = 0 \tag{41}$$

si viene a determinare in S_5 una varietà $V_3^{m^2}$ dalla quale si staccano h_1 $S_3 = S'_2 N_j$ in corrispondenza ai punti multipli N_j di c_1^m contato ciascuno tante volte quant' è la multiplicità completa q_j di N_j per la c^m. L' ordine della V_3 residua sarà dato (n°, 2, IV)

$$m + n = m^2 - q_1 - q_2 - \dots - q_{h_1} \,. \tag{42}$$

Si noti ora che ogni punto multiplo N_j di c_1^m sarà il punto reciproco, nella reciprocità (39), di ogni retta tangente multipla delle c^n, e la natura di tale punto multiplo N_j sarà la duale di quella di detta retta tangente multiplua di c^n. In particolare se la c^n data è dodata soltanto di punti

doppi e rette doppie, come dalla (25) si ha la (26), così dalla (42) si ha:

$$m + n = m^2 - 2t - 3i \tag{43}$$

formola duale della (27).

In corrispondenza alla coppia di curve complete $C^{n,m}$ e $C^{m,n}$ abbiamo pertanto in S_5 la coppia di varietà $V_3^{n^2}$, costituenti una varietà di ordine $n^2 + m^2$ dalla quale si staccano $2d + 3k + 3t + 3i$ S_3 e restano due V_3 residue entrambe di ordine $n + m$, e la relazione

$$n^2 + m^2 - (2d + 2k + 3t + 3i) = 2(n + m)$$

che ne deriva dà precisamente la (37′), caso particolare della (37).

Si noti ora che quando alla c^n si sostituisce la c^m sopra definita le multiplicità r_j dei punti singolari ed s_j delle rette singolari di c^n dànno le multiplicità r_j delle rette singolari ed s_j dei punti singolari di c^m; ne segue che applicando la formola (25) per calcolare il *carattere singolare* di c^m si trova lo stesso valore μ del carattere singolare di c^n. Analogamente si ha che il carattere cuspidale della c^m risulta eguale al carattere cuspidale della c^n, calcolato con la formola (32) perchè in questa formola, come per la (35), sostituendo alla c^n la c^m si vengono a scambiare le v_j con le v'_j e quindi si otterrà lo stesso carattere cuspidale σ. si ha perciò:

I) *Le due curve complete* $C^{n,m}$ *e* $C^{m,n}$ *determinate dalla curva* c *di ordine* n *e classe* m, *hanno lo stesso carattere singolare* μ *e lo stesso carattere cuspidale* σ.

Ne segue che per il teorema del n° 5 ed il teorema I) del n° 9, relativi ai suddetti caratteri, si ha:

II) *Le curve complete* $C^{n,m}$ *e* $C^{m,n}$, *determinate dalla curva* c *di ordine* n *e di classe* m, *hanno gli stessi due invarianti birazionali:*

$$\sigma - (n + m) = 4(p - 1)$$

$$2\mu + 3\sigma - (n^2 + m^2) = 8(p - 1)$$

essendo p *il genere di* c^n.

NOTA — Si noti che sottraendo dalla seconda la prima moltiplicata per 2 si ha la relazione:

$$2\mu + 3\sigma - (n^2 + m^2) + 2(n + m) = 0$$

cioè la (37):

$$2\mu + 3\sigma = n^2 + m^2 - 2(n + m)$$

la quale, scritta nella forma

$$n^2 + m^2 - 2\mu - 2\sigma = 2\,(n + m),$$

mette in evidenza che: *dalla* $V_3^{n^2} + V_3^{m^2}$, *per avere le due* V_3^{n+m} *rispondenti alle curve complete* $C^n,^m$ *e* $C^m,^n$, *si sottraggono* $2\mu + 3\sigma$ S_3 essendo μ e σ i caratteri *singolare* e *cuspidale* della c^n, di classe m che determina le due curve complete, caratteri che vengono determinati dalle singolarità di c o *dalle coppie di piani generatori cospaziali di una delle* V_3^{n+m} *determinata da* c^n].

12. — *Iperpiani ed* S_3 *tangenti alla* V_3^{n+m} *di* S_5.

Siamo $\pi = Pt'$ e $\pi_1 = P_1\, t'_1$ due piani generatori infinitamente vicini della V_3^{n+m} non cospaziali (n° 5), e quindi appartenenti ad S_4, perchè, come, abbiamo già osservato, essi hanno in comune il punto intersezione delle due rette t', t_1 che hanno nel piano S'_2. In questo caso particolare, per l'ipotesi che i due piani generatori π e π_1 sono infinatamente vicini (senza essere conspaziali, cioè senza far parte di uno dei σ spazi rispondenti alle coppie π, π_1 conspaziali e infinitamente vicini) il loro punto comune sarà l' intersezione delle due rette t' e t'_1 infinitamente vicine e tangenti alla curva c'^n di S'_2 (omologa della c^n di S_2 nella proiettività (5) nei due punti infinitamente vicini P' e P'_1 omologhi di P e P_1 nella proiettività (5). In queste ipotesi la retta t', tangente a c'^n in P', è la retta $P'P'_1$ ed il punto in cui t' seca la tangente infinitamente vicina t'_1 sarà il punto P'_1. Questo è, dunque, il punto comune ai due piani generatori π e π_1 considerati. Esso è un punto multiplo della V_3^{n+m} essendo il piano S'_3 multiplo della V_3 con la multiplicità m. Si noti ora che l' S_4 congiungente π e π_1 ha nel piano S_2 i due punti infinitamente vicini P e P_1 della c^n, congiunti dalla retta t che sarà tangente a c^n in P_1, e quindi detto S_4 seca S_2 nella retta t, sarà, quindi, l' iperpiano congiungente S_2 con la retta $t = PP_1$ di S_2. Si ha perciò:

I) *Congiungendo due piani generatori infinitamente vicini della* V_3^{n+m}, $\pi = P't$, $\pi_1 = P_1\, t'_1$, *non cospaziali, si ottiene l'* $S_4 = S'_2 t$, *congiungente* S'_2 *con la retta* $t = PP_1$ *tangente a* c^n *nel punto* P. *Il punto comune ai due piani* π *e* π_1 *è il punto* P'_1, *comune a* t *e* t', *omologo del punto* P_1 *di* t, *infinitamente vicino a* P, *nella proiettività* (5) *fra* S_2 *ed* S'_2.

Si noti che tale $S_4 = S'_2\, t$ risulta tangente all' ipercono di equazione (1), di vertice S'_2, lungo il suo S_3 generatore $S'_2\,P$, dato che la retta t è tangente a c^n in P. Sicchè:

II) *Congiuncendo i due piani delle gli* ∞^1 *coppie di piavi generatori della* $V_3^{n\ m}$ *infinitamente vicini, si ottengono gli* ∞^1 *iperpiani tangenti dell'ipercono di equazione* (1).

Consideriamo ora un punto R_1 del piano generatore π_1 (infinitamente vicino al piano generatore π) infinitamente vicino ad un prefissato punto R di π, distinto dal punte $P'_1 = \pi\pi_1$. L' $S_3 = \pi R_1$ sarà tangente alla V_3 nel punto R. Tale S_3 conterrà la retta $r = RP'_1$ e la retta, infinitamente vicina a questa, $r = R_1 P'_1$ del piano π_1. Ciò porta che l' S_3 tangente alla V_3 in ogni punto della retta r è lo stesso $S_3 = \pi R_1$. Si ha perciò:

Ogni S_3 *tangente alla* V_3^{n+m} *in un punto* R *di un suo piano generatore* π, *tocca la* V_3 *nei punti della retta, passante per* R, *del fascio di rette di* π *avente per centro il punto* P'_1 *in cui* π *seca il piano generatore* π_1 *in* V_3 *infinitamente vicino a* π.

Ne segue che

III) *La* V_3^{n+m} *ammette* ∞^2 S_3 *tangenti distinti. Le* ∞^2 *rette di contatto sono distribuiti in* ∞^1 *fasci di rette aventi per sostegno i piani generatori della* V_3. *Il centro del fascio in tale piano generatore* $\pi = Pt'$ *è il punto* P'_1 *di* t' *in cui* π *seca il piano generatore* π_1 *infinitamente vicino ad esso.*

INDICE

Osservazioni sull' esistenza e sull' unicità della soluzione dei problemi al contorno misti per equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico

Nota del socio corr. **Guido Stampacchia**

(Adunanza del dì 7 maggio 1955)

Sunto. — Si fanno alcune osservazioni sui problemi al contorno misti per equazioni a derivate parziali del secondo ordine autoaggiunte di tipo ellittico. Si confrontano i risultati di G. Fichera con quelli ottenuti recentemente dall' Autore con un metodo variazionale e si esamina, con lo stesso metodo, il problema dell' unicità della soluzione anche per alcuni tipi di equazioni non lineari.

1. Consideriamo in un dominio T l' operatore del secondo ordine autoaggiunto:

$$\text{(1)} \qquad E(u) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{h=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial u}{\partial x_h}$$

essendo i coefficienti a_{hk} $(a_{hk} = a_{kh})$ continui con le derivate prime in un campo C contenente il dominio T nell' interno ed ivi la forma quadratica:

$$\sum_{h,k}^{1 \ldots n} a_{hk} \lambda_h \lambda_k$$

risulti definita positiva. Siano poi $\mathcal{F}_1 T$ e $\mathcal{F}_2 T$ due porzioni di $\mathcal{F}T$, senza punti interni in comune, che esauriscono $\mathcal{F}T$. Sui coefficienti a_{hk} e sul dominio T faremo poi delle ulteriori ipotesi che assicurino l' esistenza della funzione di Green G (P, Q) relativa al problema di Dirichlet per l' operatore (1) in un dominio T' contenente T e tale che: $\mathcal{F}T \cdot \mathcal{F}T' = \mathcal{F}_1 T$.

Il problema misto consiste nel ricercare una soluzione dell'equazione:

$$E(u) = f$$

della quale siano assegnati su $\mathcal{F}_1 T$ i valori $\alpha(P)$ di essa e su $\mathcal{F}_2 T$ i valori $\beta(P)$ della sua derivata conormale.

Questo problema è stato studiato in modo molto generale da G. Fichera

nel 1947 [1]). Egli, risolvendo preventivamente un problema di DIRICHLET, riduce il problema dato a quello particolare in cui $\alpha(P)$ e f sono nulli, rispettivamente su $\mathfrak{F}_1 T$ e in T. Per il nuovo problema Egli dimostra — supponendo anche più generale E (u) — l'esistenza e l'unicità della soluzione nella classe $\mathfrak{S}_{\prime\prime}$ delle funzioni $u(P)$ che soddisfano alle seguenti condizioni:

a) $u(P)$ è una funzione continua con le derivate parziali prime e seconde in $T - \mathfrak{F}T$; anzi la funzione $u(P)$ è continua in $T - \mathfrak{F}_2 T$;

b) le derivate prime di $u(P)$ sono di quadrato sommabile in T;

c) detti $\mu(M)$ e $\delta(M)$ i valori della u e della derivata conormale su $\mathfrak{F}_2 T$, nel senso che quasi ovunque su $\mathfrak{F}_2 T$, si abbia:

$$\lim_{P \to M \,(\text{su } \nu_M)} u(P) = \mu(M) \qquad \lim_{P \to M \,(\text{su } \nu_M)} \frac{du(P)}{d\nu_M} = \delta(M)$$

essendo ν la conormale interna a T, la funzione:

$$\int_{\mathfrak{F}_2 T} \left\{ \mu(Q) \frac{d\, G(Q, P)}{d\nu_Q} - \delta(Q)\, G(Q, P) \right\} d_Q \sigma$$

si riduce a zero per P in $T' - T$ ed a $u(P)$ per P in $T - \mathfrak{F}T$.

Lo stesso procedimento adoperato da G. FICHERA si può applicare quando f sia di quadrato sommabile in T e $\alpha(P)$ appartenga alla classe $\mathfrak{B}_2$ [2]) su $\mathfrak{F}_1 T$. In questo caso la soluzione risulta somma di due funzioni, l'una appartenente alla classe $\mathfrak{S}_{\prime\prime}$ e l'altra appartenente alla classe $\mathfrak{B}_2$. Quindi tale soluzione, oltre a soddisfare ad una condizione del tipo *c*), soddisfa alle seguenti condizioni:

a') è continua rispetto alle coppie di variabili ed è assolutamente continua con le derivate prime rispetto alle variabili separatamente; mentre le derivate seconde sono di quadrato sommabile nell'interno di T;

b') ha derivate prime di quadrato sommabile in T.

Recentemente [3]) ho dimostrato alcuni risultati relativi ai problemi

---

[1]) G. FICHERA, *Analisi esistenziale per le soluzioni dei problemi al contorno misti relativi all'equazione e ai sistemi di equazioni del secondo ordine di tipo ellittico,* Ann. Scuola Normale Sup di Pisa, s. III. vol. 1 (1949) p. 75-100.

[2]) Per questa nomenclatura e per la possibilità di risolvere il relativo problema di DIRICHLET: cfr. G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno per equazioni di tipo ellittico a derivate parziali e questioni di calcolo delle variazioni connesse,* Ann. di Matem. s. IV to. 33 (1952) pp. 211-238, in particolare § 2, p. 220.

[3]) *Problemi al contorno misti per equazioni del calcolo delle variazioni,* in corso di stampa in Ann. di Matem.

misti e in particolare da questi si deduce che il problema in questione ammette almeno una soluzione che soddisfa alle condizioni a'), b') e inoltre: [4])

d) rende minimo il funzionale:

$$(2) \qquad \int_T \left\{ \frac{1}{2} \sum_{h,k}^{1\dots n} a_{hk}\, p_h\, p_k + fu \right\} dx + \int_{\mathfrak{F}_2 T} \beta\, u\, d\sigma \qquad (dx = dx_1\, dx_2 \dots dx_n)$$

fra tutte le funzioni della classe $\mathfrak{A}_2$ [5]) che assumono su $\mathfrak{F}_1 T$ i valori α (P).

Dalla dimostrazione che ho dato di questo teorema risulta che dalla condizione d) segue di conseguenza una condizione analoga alla c), che si riduce a questa quando sono nulle α (P) e f rispettivamente su $\mathfrak{F}_1 T$ e in T [6]). Da questa osservazione e dal risultato di G. FICHERA segue che la soluzione che soddisfa alle condizioni a'), b') e d) è unica.

A questo proposito va ricordato che E. DE GIORGI ha dimostrato [7]), con un esempio, che possono esistere infinite soluzioni del problema al contorno considerato soddisfacenti alle condizioni a'), b'). [8]) E' però immediato riscontrare che tali funzioni, pur rendendo finito il funzionale (2), non lo rendono minimo.

2. Nello stesso lavoro già citato ho poi dimostrato il seguente teorema di esistenza per equazioni non lineari: [9])

TEOREMA: *Nelle ipotesi ammesse per i coefficienti a_{hk}, esiste al-*

---

[4]) loc. cit. in [3]), § 7, e osservazione in fine al n. 3.

[5]) cfr. G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni in n variabili*, Ricerche di Matematica, vol. 1 (1952), pp. 27-54.

[6]) loc. cit. in [3]), § 6.

[7]) E. DE GIORGI, *Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico con condizioni al contorno di tipo misto*, Ricerche di Matematica, vol. II (1953), pp. 183-191.

[8]) Il problema dell' unicità della soluzione si può riguardare sotto due aspetti diversi. L' uno consiste nel cercare in qual modo devono essere assunti i dati al contorno in un senso certamente più restrittivo di quello considerato in c) -- perchè vi sia l' unicità della soluzione. Si cfr. ad es. L. MYRBERG, *Über die vermischte Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen*, Annales Accademiae scientiarum Fennicae, serie A, N. 103 (1951). L' altro aspetto — che qui prendiamo in considerazione -- consiste nel cercare quali ulteriori condizioni occorre aggiungere alle a'), b') -- ferme restando il tipo di condizioni al contorno — perchè vi sia l' unicità della soluzione.

[9]) cfr. loc. cit. in [3]), § 7; mi limito ad enunciare questo teorema in un caso particolare, le deduzioni del teorema di unicità si potrebbero applicare anche ai casi più generali considerati in loc. cit. in [3]).

meno una funzione u soddisfacente alle condizioni a'), b') la quale soddisfa quasi ovunque l'equazione :

$$\mathrm{E}(u) = g(x, u)$$

e si riduce su $\mathfrak{F}_1\mathrm{T}$ *ad una funzione assegnata* α (M), *mentre su* $\mathfrak{F}_2\mathrm{T}$ *si ha, quasi ovunque :*

$$\lim_{\mathrm{P} \to \mathrm{M}\ (\mathrm{su}\ \nu_\mathrm{M})} \frac{d\ u\ (\mathrm{P})}{d\ \nu_\mathrm{M}} = \Phi\left(\mathrm{M}, u\ (\mathrm{M})\right)$$

se :

1) *la funzione* $g(x, u)$ — *definita per* x *in* T *e per ogni valore di* u — *soddisfa alle seguenti limitazioni :*

$$(3) \quad |\, g(x, u)\, | \leqq \mathrm{M}\, |\, u\, | + \mathrm{N}(x)\, ; \quad \int_0^u g(x, u)\, du > -2qu^2 + f(x)\, u + \mathrm{N}(x)$$

con M, q *costanti e* $f(x)$, $\mathrm{N}(x)$ *funzioni di quadrato sommabile in* T.

II) *La funzione* $\Phi(x, u)$ *soddisfa su* $\mathfrak{F}_2\mathrm{T}$ *alle seguenti limitazioni :*

$$|\, \Phi(x, u)\, | \leqq \mathfrak{M}\, |\, u\, | + \mathfrak{N}(x)$$

con $\mathfrak{M}$ *costante e* $\mathfrak{N}(x)$ *di quadrato sommabile su* $\mathfrak{F}_2\mathrm{T}$.

III) $\mathfrak{F}_1\mathrm{T}$ *non è vuoto e nella* (3) *è:* $q \leqq 0$.

La soluzione considerata gode inoltre della seguente proprietà :

D) *Rende minimo il funzionale :*

$$\int_\mathrm{T} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{h,k}^{1 \cdots n} a_{hk}\, p_h\, p_k + \int_0^u g(x, u)\, du \right\} dx + \int_{\mathfrak{F}_2\mathrm{T}} d\sigma \int_0^u \Phi(x, u)\, du$$

nell'insieme delle funzioni della classe $\mathfrak{A}_2$ *che assumono gli stessi valori* a (M) *su* $\mathfrak{F}_1\mathrm{T}$.

Dimostriamo ora il seguente teorema di unicità :

TEOREMA : *Se oltre alle ipotesi del teorema precedente si suppone in più che si abbia :*

$$g_u'(x, u) \geqq 0 \qquad \qquad \Phi_u'(x, u) \geqq 0$$

esiste una sola soluzione del problema considerato che soddisfa alla condizione D.

Supponiamo, per assurdo, che vi siano dne funzioni u^1 e u^2 che soddisfano al problema considerato nell' enunciato del teorema precedente e alla condizione D). Potremo allora scrivere:

$$\mathfrak{F}(u^{(2)}) - \mathfrak{F}(u^{(1)}) = \int_T \left\{ \sum_{h,k}^{1\cdots n} a_{hk}\, p_h^{(1)} (p_k^{(2)} - p_k^{(1)}) + g(x, u^{(1)}) (u^{(2)} - u^{(1)}) \right\} dx +$$

$$+ \int_{\mathfrak{F}_2 T} \Phi(z, u^{(1)}) (u^{(2)} - u^{(1)})\, d\sigma + \int_T \left\{ \sum_{h,k}^{1\cdots n} a_{hk} (p_h^{(2)} - p_h^{(1)}) (p_k^{(2)} - p_k^{(1)}) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 (1-t)\, g_u'\bigl(x, u^{(1)} + t(u^{(2)} - u^{(1)})\bigr)\, dt\, (u^{(2)} - u^{(1)})^2 \right\} dx +$$

$$+ \int_{\mathfrak{F}_2 T} d\sigma \int_0^1 (1-t)\, \Phi_u'\bigl(x, u^{(1)} + t(u^{(2)} - u^{(1)})\bigr)\, dt\, (u^{(2)} - u^{(1)})^2\, d\sigma.$$

Ma la somma del primo e del secondo integrale è nulla poichè u^1 soddisfa alla condizione D) ed $u^{(2)} - u^{(1)}$ è nulla su $\mathfrak{F}_1 T$ [10]), mentre gli altri integrali a secondo membro danno un contributo positivo. Si giunge allora all'assurdo perchè il primo membro è nullo essendo, per la condizione D): $\mathfrak{F}(u^{(1)}) = \mathfrak{F}(u^{(2)}) = \min.$ Il teorema è così dimostrato.

---

[10]) Cfr. loc. cit. in [3]), n. 4. Si osservi però che la deduzione sussiste anche se l'incremento γ dato alla funzione minimizzante $u^{(1)}$ non è lipschitziana, ma soltanto appartenente alla classe $\mathfrak{A}_2$.

Il significato paleoclimatico e l'età della "crosta calcarea" nell'area del foglio 175 (Cerignola)

Nota del dott. **Vincenzo Minieri**, *presentata dal socio* **G. D'Erasmo**

(Adunanza del dì 7 maggio 1955)

Sunto. — Sono prese in esame alcune formazioni evaporitiche continentali osservate sui conglomerati di chiusura del Calabriano nell'area del F° 175 (Cerignola) e si osserva come esse, dal punto di vista paleoclimatico, debbano essere messe in relazione alle ultime fasi del Tirreniano.

Premessa. — Nel corso del rilevamento geologico del foglio 175 (Cerignola) affidato dal Servizio Geologico d'Italia all'Istituto di Geologia di Napoli, diretto dal prof. D'Erasmo, ho avuto occasione di compiere alcune osservazioni su un fenomeno già noto per altre zone, a carattere paleoclimatico regionale, che mi è sembrato di un certo interesse, perchè consente di trarre qualche utile conclusione circa le particolari condizioni ambientali, dalle quali, durante il Quaternario, è stata interessata una vasta area della Puglia e della Lucania.

Sui conglomerati poligenici calabriani, rappresentanti la fase di chiusura di quel ciclo sedimentario e su quelli fluviali antichi dell'Ofanto, i movimenti ascendenti delle soluzioni attraversanti tali sedimenti, prevalendo su quelli discendenti, hanno condotto alla formazione di orizzonti illuviali, più o meno notevoli, rappresentati da depositi evaporitici, di natura prevalentemente calcarea, affioranti in superficie, noti sotto il nome di "crostoni", i quali, com'è risaputo, rendono particolarmente difficili e sfavorevoli, dal punto di vista geopedologico, i terreni che ne sono interessati.

Il fenomeno indicato riveste però un carattere di notevole interesse in relazione ai fattori paleoclimatici ai quali è stata soggetta quell'area del bacino mediterraneo, giacchè fornisce criteri di essenziale importanza per risalire, attraverso la evoluzione delle rocce nella zona superficiale, a quelle caratteristiche climatiche che si verificarono su estese zone della superficie terrestre nel corso dei tempi geologici.

Nel quadro di tali indagini deve essere inserita la presente nota, che ha lo scopo di apportare un contributo alla conoscenza di un fenomeno, già noto sotto altri aspetti, e di datarlo nel tempo, allorchè manchino criteri paleontologici, microfaunistici e macrofaunistici, che servano a definire l'età, l'ambiente e il regime climatico, in cui si depositarono taluni sedimenti.

Cenni geologici. La " crosta calcarea „ pugliese è stata oggetto di numerosi lavori, a carattere geo-pedologico, dai quali si rileva anzitutto una controversa interpretazione relativa alla sua genesi, alla sua giacitura ed alla sua età, anche se in effetti lo scopo delle indagini eseguite abbia avuto altro fine, oltre quello menzionato.

Così in alcune note e memorie A. DE DOMINICIS [1]), partendo dal concetto genialmente intravisto dall' ULPIANI, perviene all'interessante ed ingegnosa ipotesi, secondo la quale la crosta rappresenterebbe una formazione attuale, di origine storica, generatasi nel piano d' incontro delle soluzioni calcaree, ascendenti dal suolo sabbioso, con le pseudosoluzioni colloidali circolanti nel terreno e tendenti a ridiscendere. Il fenomeno, quindi, consisterebbe nella ben nota coagulazione che i colloidi subìscono per azione degli elettroliti: peraltro, l' origine del deposito implicherebbe la preformazione tanto del sottosuolo quanto del terreno e non potrebbe essere messa in relazione all' acqua che evapora, giacchè in tal caso " la crosta avrebbe dovuto essere non solo superficiale, ma addirittura affiorante „.

Una diversa interpretazione si ravvisa nella memoria pubblicata da E. PANTANELLI [2]), il quale, seguendo più il concetto litologico e geologico, sulla scorta anche delle vicende geologiche che hanno interessato nel passato i sedimenti antichi e recenti della Puglia, ascrive al Quaternario antico o medio la crosta, considerandola una formazione geologica, depositatasi, quale melma di fondo, alla fine del periodo lagunare o lacustre, stabilitosi nella zona in seguito al sollevamento generale del Tavoliere, quando già i suoi argini meridionali e settentrionali erano emersi.

Il particolare significato paleoclimatico delle formazioni quaternarie continentali di tal genere è segnalato in un interessante lavoro di CHOUBERT e BRYSSINE [3]), i quali hanno richiamato l' attenzione degli studiosi sul fatto che l' epoca di formazione di quei depositi deve essere compresa in tutto l' *inter-pluviale* Mindel-Riss, vale a dire nelle ultime fasi del Tir-

---

[1]) DE DOMINICIS A., *La crosta pugliese e la sua origine. Indagini di chimica pediologica in Terra di Bari.* Annali della R. Scuola Superiore di Agricoltura in Portici, s. II, vol. XV. Portici, 1918-19; ID., *La crosta pugliese e la sua origine. Nota II.* Ibid., 1919-20.

[2]) PANTANELLI E., *Le terre del Tavoliere di Puglia.* Annali della Sperimentazione agraria, vol. XXXVI. Roma, 1939.

[3]) CHOUBERT G. e BRYSSINE G., *Sur les formations continentales du Quaternaire marocain.* Comptes Rendus de l' Acad. des Sciences t. 223, pag. 863. Paris, 1946. — Oltre tali lavori si consultino anche i seguenti: GAUCHER G., *Sur quelques conditions de formations des croûtes calcaires.* Ibid., t. 227, pag. 215. Paris, 1948. FLAUDRIN J., GAUTIER M. e LAFFITTE R., *Sur la formation de la croûte calcaire en Algerie.* Ibid., t. 226, pag. 416, Paris, 1948.

reniano, in perfetto accordo, dal punto di vista climatico, per l' età e la natura dei sedimenti, con una curva climatica da uno di essi indicata per il Quaternario. Di indubbio interesse appare poi la considerazione che, dopo quell' epoca, « nessun clima attuale determina più la formazione generalizzata di croste calcaree », giacchè nei depositi post-tirreniani è raro rinvenire tale formazione, se non in misura assai ristretta e da considerarsi pertanto decisamente localizzata.

La situazione geologica nell' area compresa nel Foglio 175, quale si presenta in base al rilevamento [1]) finora eseguito, si riassume nella serie generale costituita dai seguenti termini stratigrafici:

1) Eocene-Oligocene in facies di flysch o di argille scagliose tipiche varicolori;

2) Miocene medio-superiore, rappresentato da molasse alquanto argillose fossilifere;

3) Pliocene, nei consueti aspetti di argille azzurre sormontate da sabbie giallastre cementate;

4) Quaternario antico, rappresentato da argille a sabbiosità crescente verso l' alto, sicuramente ascrivibili al Calabriano per le loro caratteristiche microfaune, cui seguono i conglomerati poligenici, di spessore vario con pendenza generale E - NE, tipicamente regressivi e pertanto di chiusura del ciclo sedimentario predetto.

La serie sopraindicata non è però presente con tutti i suoi termini nei vari quadranti del Foglio in corso di rilevamento, mancando in alcuni di essi qualcuna delle formazioni suddette. Peraltro, ovunque siano presenti i conglomerati di chiusura del Quaternario antico o quelli fluviali antichi dell' Ofanto, appare, per notevoli tratti, la formazione evaporitica, oggetto delle presenti indagini. In particolare essa affiora proprio su questi sedimenti recenti, interessati dal fenomeno osservato, che si estende notevolmente nell' area considerata e che talora rende evidente la presenza de conglomerati, anche quando essi non affiorano in superficie.

Tale condizione di giacitura appare di notevole interesse, poichè una delle condizioni essenziali per la genesi dei crostoni di qualsiasi natura, è la particolare porosità delle rocce madri: in tal caso, la notevolissima permeabilità dei conglomerati ha creato, in concomitanza con i fattori climatici, la possibilità di un rapido ed esteso sviluppo di quei depositi.

La sezione geologica (fig. 1), qui di seguito riportata, mostra chiara-

---

[1]) D' Erasmo G., Lazzari A., Minieri V. e Moncharmont Zei M., *Sul rilevamento del F° Cerignola (175), quadrante III*. Boll. Serv. Geol d' Italia, vol LXXV. (1953). Roma, 1954.

mente i rapporti di giacitura della formazione evaporitica sui sedimenti recenti dell' area rilevata.

Pertanto la serie dei terreni innanzi indicata, i caratteri microfaunistici delle argille sottostanti ai conglomerati, l' estensione areale del de-

Fig. 1 — Sezione attraverso l' Ofanto:
1. Conglomerati calabriani. — 2. Argille calabriane. — 3. Alluvione antica.
4. Crosta.

posito evaporitico da cui essi sono interessati, richiamano, in tutta la vasta area compresa nel foglio 175, le stesse condizioni ambientali, geologiche e paleoclimatiche, che hanno indotto gli autori francesi a definire « clima della crosta » quello appunto corrispondente alla genesi di quella formazione.

Aggiungerò poi che un altro fatto concorda con le osservazioni precedentemente riportate, e cioè la presenza, negli stessi conglomerati, di intercalazioni lenticolari sabbiose rubefatte, di evidente alterazione dei ciottoli poligenici del conglomerato, che richiamano, per il loro aspetto, il noto fenomeno della laterizzazione; trattasi però di effetti assai localizzati, tranne alcune zone nelle quali, per un esteso tratto, i sedimenti rossi di alterazione accompagnano la crosta calcarea, ma comunque tali da indurre a ritenerli connessi al generale fenomeno, nella zona, di particolari variazioni climatiche.

Ricerche chimiche. — Allo scopo di poter dedurre se anche le condizioni geochimiche risultassero le stesse in tutta l' area interessata dalla presenza di crostoni calcarei e se la costituzione litologica di essi presentasse possibili variazioni, ho eseguito alcune analisi chimiche, relative a vari campioni raccolti a più riprese durante la campagna di rilevamento.

Le analisi, eseguite con i comuni metodi e riportate nel quadro seguente, corrispondono a campioni raccolti nelle località Posta di Mauro (175 — II NE), Posta Camarda Vecchia (175 — III SE), Capannola (175 — III SE), S. Leonardo (175 — II NO), rispettivamente ai numeri I, II, III, IV.

I dati analitici riassuntivi riportati indicano che il deposito non è totalmente calcareo, ma è inquinato da quantità variabili di silice, abbastanza notevole nel campione di una crosta rosea (II), raccolta sui conglomerati di un antico terrazzo fluviale del fiume Ofanto.

La presenza della silice nel deposito calcareo analizzato, può essere spiegata con il fatto che, attraverso i conglomerati poligenici, risalivano soluzioni più o meno ricche di silice colloidale, la quale è stata trattenuta

	I	II	III	IV
SiO_2	9.35	11.35	3.82	6.56
Al_2O_3	0.50	2.45	3.86	5-18
Fe_2O_3	0.30	1.95	0.36	1.54
CaO	49.30	45.06	50.30	47.58
MgO	0.35	0.22	0.18	0.40
CO_2	38.75	36.38	39.54	37.40
H_2O^+	1.16	1.90	1.45	1.11
H_2O^-	0.18	0,70	0.60	0.20
Totale	99.89	100,01	100.11	99.97

durante la deposizione, in quanto, come è noto, gli ioni calcio, se presenti in elevata cencentrazione, trasformano in gel l' ione colloidale siliceo, che ad essi si accompagna in soluzione.

Conclusione. — Le presenza dei conglomerati poligenici del Quaternario antico (Calabriano) nell' area compresa nel Foglio 175 (Cerignola) ha consentito, in relazione al particolare clima che interessò il bacino mediterraneo durante il Tirreniano, la formazione, su aree notevoli, di un deposito evaporitico calcareo-siliceo, che deve ritenersi analogo alla ben nota crosta calcarea presente in tutta l' Africa del Nord.

La genesi di tale deposito continentale quaternario deve essere ricercata nella particolare costituzione geologica dell' area predetta e deve essere connessa ad un fenomeno climatico, che interessò quella regione durante il Tirreniano, caratterizzato, com' è noto, da un regime climatico arido e secco, di tipo tropicale o sub-tropicale, come sotto tanti altri aspetti mostrano i sedimenti di quell' epoca.

Le soluzioni calcareo-silicee che permeavano i conglomerati, risalirono in superficie, depositando un notevole spessore di incrostazioni. Tale movimento ascendente dovette essere determinato dalla notevole aspirazione capillare dell' acqua dalle zone più profonde, per effetto della rilevante evaporazione che avveniva in superficie ad una temperatura media che doveva superare i 20°.

Avvenuto pertanto il ritiro del mare calabriano, come chiaramente mostrano i conglomerati di chiusura di quel ciclo sedimentario, l' area dovette essere interessata da altra sommersione marina e fu successivamente sottoposta ad un regime climatico subtropicale, che creò le condizioni ambientali favorevoli alla genesi della crosta calcarea, tipico esempio della evoluzione di taluni sedimenti nella zona superficiale.

In definitiva, pur mancando di elementi atti a definire con sicurezza l' età di quelle formazioni evaporitiche, mi sembra che esse possano ragionevolmente essere messe in relazione alle ultime fasi del Tirreniano.

Napoli, Istituto geo-paleontologico dell' Università, febbraio 1955.

LE SUPERFICIE IPERELLITTICHE DELL' S_3 TRIDUALE E LA LORO RAPPRESENTAZIONE COMPLESSA

Nota del dott. **Angelo Fadini**, *presentata dal socio* **N. Spampinato**

(Adunanza del dì 7 maggio 1955)

Sunto. – Si riassumano le proprietà relative alla rappresentazione complessa nell' S_{11} complesso di una superficie iperellittica dell' S_3 triduale.

Date tre funzioni abeliane complesse:

$$f(x_1 y_1) \quad , \quad g(x_1 y_1) \quad , \quad h(x_1 y_1)$$

costituenti una base per le funzioni abeliane iperellittiche rispondenti alla matrice di periodi:

$$\begin{Vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 & w'_4 \end{Vmatrix}$$

le tre funzioni F (X Y), G (X Y), H (X Y), con

$$F(X Y) = f(x_1 y_1) + [x_2 f'_{x_1}(x_1 y_1) + y_2 f'_{y_1}(x_1 y_1)]\, u_2 + \\ + [x_3 f'_{x_1}(x_1 y_1) + y_3 f'_{y_1}(x_1 y_1)]\, u_3$$

ed altre due analoghe espressioni per G ed H, dove le u_1, u_2, u_3 sono le unità dell' algebra dei numeri triduali, costituiscono una base per le funzioni abeliane triduali aventi la matrice dei periodi

$$\begin{Vmatrix} w_1\, u_1 & w_2\, u_1 & w_3\, u_1 & w_4\, u_1 \\ w'_1\, u_1 & w'_2\, u_1 & w'_3\, u_1 & w'_4\, u_1 \end{Vmatrix}$$

nel senso che ogni funzione abeliana triduale avente quella matrice di periodi è del tipo:

$$K(x y) = R(F, G, H) \qquad (2)$$

ove R è il simbolo di una funzione razionale.

Supposto che le tre funzioni abeliane complesse $f(x_1\ y_1)$, $g(x_1\ y_1)$ $h(x_1\ y_1)$ siano date dai tre rapporti di funzioni theta:

$$f(x_1\ y_1) = \frac{\Theta_1(x_1\ y_1)}{\Theta_4(x_1 y_1)}\ ,\ g(x_1\ y_1) = \frac{\Theta_2(x_1\ y_1)}{\Theta_4(x_1\ y_1)}\ ,\ h(x_1\ y_1) = \frac{\Theta_3(x_1\ y_1)}{\Theta_4(x_1\ y_1)}$$

prolungando nel campo triduale le funzioni complesse theta ponendo:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \Theta_i(\mathrm{X\ Y}) = \Theta_i(x_1\ y_1)\, u_1 &+ \left(x_2\ \frac{\partial\Theta_i}{\partial x_1} + y_2\ \frac{\partial\Theta_i}{\partial x_1}\right) u_2 + \\ &+ \left(x_3\ \frac{\partial\Theta_i}{\partial x_1} + y_3\ \frac{\partial\ \Theta_i}{\partial\, y_1}\right) u_3 \end{aligned}$$

si hanno le funzioni theta triduali. Ponendo per brevità:

$$\left\{\begin{aligned} \rho_i &= \Theta_i(x_1\ y_1) \\ \sigma_i &= y_2\ \frac{\partial\Theta_i}{\partial x_1} + y_2\ \frac{\partial\ \Theta_i}{y_1} \\ \tau_i &= x_3\ \frac{\partial\ \Theta_i}{\partial x_1} + y_3\ \frac{\partial\ \Theta_i}{\partial y_1} \end{aligned}\right. \qquad (i=1, 2, 3, 4)\quad (4)$$

la Θ_i (X Y) assume la forma:

$$\Theta_i(\mathrm{X\ Y}) = \rho_i\ u_1 + \sigma_i\ u_2 + \tau_i\ u_3 \qquad (5)$$

Consideriamo un S_3 proiettivo triduale ed indichiamo con (R_1, R_2, R_3, R_4) le coordinate proiettive omogenee di un punto corrente in tale S_3; le equazioni

$$R_i = \Theta_i(\mathrm{X\ Y})$$

sono le equazioni parametriche triduale di una superficie iperellittica triduale. Esse equivalgono, nel campo complesso, alle dodici equazioni (4) e pertanto la superficie iperellittica triduale di equazioni parametriche triduali (1) si può rappresentare mediante una varietà di un opportuno S_{11} proiettivo complesso.

Invero, tenendo presente la prima rappresentazione di un S_r ipercomplesso, possiamo affermare che un punto P (R_1 R_2 R_3 R_4) della superficie iperellittica triduale in esame è rappresentato in un S_{11} proiettivo complesso dal piano π congiungente i punti

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\ (\rho_1, \sigma_1, \tau_1, \rho_2, \sigma_2, \tau_2, \rho_3, \sigma_3, \tau_3, \rho_4, \sigma_4, \tau_4) \\ &\mathrm{P}_2\ (0, \rho_1, 0, 0, \rho_2, 0, 0, \rho_3, 0, 0, \rho_4, 0) \\ &\mathrm{P}_3\ (0, 0, \rho_1, 0, 0, \rho_2, 0, 0, \rho_3, 0, 0, \rho_4) \end{aligned}$$

dove le ρ_i, σ_i, τ_1 sono date dalle (4).

Il punto corrente del piano π ha le coordinate combinazioni lineari delle coordinate dei punti P, P_2, P_3 e pertanto, indicando con ξ_i

($i = 1, 2, \ldots, 12$) le coordinate dei punti dell' S_{11}, quelle di un punto corrente nel piano π sono:

$$(7)\left\{\begin{array}{llll}\xi_1 = \rho_1 & \xi_4 = \rho_2 & \xi_7 = \rho_3 & \xi_{10} = \rho_4 \\ \xi_2 = \sigma_1 + h\rho_1 & \xi_5 = \sigma_2 + h\rho_2 & \xi_8 = \sigma_3 + h\rho_3 & \xi_{11} = \sigma_4 + h\rho_4 \\ \xi_3 = \tau_1 + k\rho_1 & \xi_6 = \tau_2 + k\rho_2 & \xi_9 = \tau_3 + k\rho_3 & \xi_{12} = \tau_4 + k\rho_4\end{array}\right.$$

La (7), con le ρ_i, σ_i e τ_i date dalle (4), sono le equazioni parametriche di una varietà V_8 di S_{11}, riempita dagli ∞^6 punti (dimensione complessa) della superficie iperellittica data, con i parametri non omogenei h, k, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3.

Le ξ_i risultano funzioni lineari dei sei perametri h, k, x_2, y_2, x_3, y_3 e funzioni analitiche, mediante serie theta, dei parametri x_1 ed y_1.

Ponendo:

$$h = \frac{h_1}{h_7}, \quad k = \frac{h_2}{h_7}, \quad x_2 = \frac{h_3}{h_7}, \quad x_3 = \frac{h_4}{h_7}, \quad y_2 = \frac{h_5}{h_7}, \quad y_3 = \frac{h_6}{h_7}$$

le (7) diventano:

$$(8)\left\{\begin{array}{l}
\zeta_1 = h_7\, \Theta_1(x_1\, y_1) \\
\zeta_2 = h_1\, \Theta_1(x_1\, y_1) + h_3 \dfrac{\partial\, \Theta_1(x_1\, y_1)}{\partial\, x_1} + h_5 \dfrac{\partial\, \Theta_1(x_1\, y_1)}{\partial\, y_1} \\
\xi_3 = h_2\, \Theta_1(x_1\, y_1) + h_4 \dfrac{\partial\, \Theta_1(x_1\, y_1)}{\partial\, x_1} + h_6 \dfrac{\partial\, \Theta_1(x_1\, y_1)}{\partial\, y_1} \\
\xi_4 = h_7\, \Theta_2(x_1\, y_1) \\
\xi_5 = h_1\, \Theta_2(x_1\, y_1) + h_3 \dfrac{\partial\, \Theta_2(x_1\, y_1)}{\partial\, x_1} + h_5 \dfrac{\partial\, \Theta_2(x_1\, y_1)}{\partial\, y_1} \\
\xi_6 = h_2\, \Theta_2(x_1\, y_1) + h_4 \dfrac{\partial\, \Theta_2(x_1\, y_1)}{\partial\, x_1} + h_6 \dfrac{\partial\, \Theta_2(x_1\, y_1)}{\partial\, y_1} \\
\xi_7 = h_7\, \Theta_3(x_1\, y_1) \\
\xi_8 = h_1\, \Theta_3(x_1\, y_1) + h_3 \dfrac{\partial\, \Theta_3(x_1\, y_1)}{\partial\, x_1} + h_5 \dfrac{\partial\, \Theta_3(x_1\, y_1)}{\partial\, y_1} \\
\xi_9 = h_2\, \Theta_3(x_1\, y_1) + h_4 \dfrac{\partial\, \Theta_3(x_1\, y_1)}{\partial\, x_1} + h_6 \dfrac{\partial\, \Theta_3(x_1\, y_1)}{\partial\, y_1}
\end{array}\right.$$

$$
(8) \quad \begin{cases}
\xi_{10} = h_7\, \Theta_4\,(x_1\ y_1) \\[2ex]
\xi_{11} = h_1\, \Theta_4\,(x_1\ y_1) + h_3\, \dfrac{\partial\, \Theta_4\,(x_1\ y_1)}{\partial\, x_1} + h_5\, \dfrac{\partial\, \Theta_4\,(x_1\ y_1)}{\partial\, y_1} \\[2ex]
\xi_{12} = h_2\, \Theta_4\,(x_1\ y_1) + h_4\, \dfrac{\partial\, \Theta_4\,(x_1\ y_1)}{\partial\, x_1} + h_6\, \dfrac{\partial\, \Theta_4\,(x_1\ y_1)}{\partial\, y_1}
\end{cases}
$$

si ha dunque:

la superficie iperellittica triduale di equazioni parametriche (6), *con le funzioni theta triduali date dalla* 3), *è rappresentata nell'* S_{11} *complesso dalla varietà algebrica* V_8, *di equazioni parametriche* (8), *con i parametri complessi non omogenei* x_1, y_1 *ed i sette parametri omogenei* $h_1, h_2, .. h_7$.

Se nelle equazioni (8) fissiamo i valori di x_1 ed y_1 al variare delle h esse forniscono un S_6 che diremo S_6 *generatore della* V_8; dunque la V_8 contiene ∞^2 S_6 generatori.

Per $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = 0$ le (8) danno il punto

$$P_1 \equiv [\Theta_1\,(x_1\ y_1),\ 0,\ 0,\ \Theta_2\,(x_1\ y_1)\ 0,\ 0,\ \Theta_3\,(x_1\ y_1)\ 0,\ 0,\ \Theta_4\,(x_1\ y_1)\ 0,\ 0]$$

che, al variare di x_1 ed y_1, descrive una superficie iperellittica V_2 di equazioni $\rho_i = \Theta_i$, appartenente all' S_3 α_1, di equazioni:

$$\xi_2 = \xi_3 = \xi_5 = \xi_6 = \xi_8 = \xi_9 = \xi_{11} = \xi_{12} = 0$$

Analogamente i punti P $(0, \Theta_1, 0, 0, \Theta_2, 0, 0, \Theta_3, 0, 0, \Theta_4\ 0)$ e (Q $0, 0, \Theta_1, 0, 0, \Theta_2, 0, 0, \Theta_3, 0, 0, \Theta_4$), al variare di x_1 ed y_1, descrivono ciascuno una superficie iperellittica; quella V''_2 descritta da P appartiene all' S_3 α_2 di equazioni:

$$\xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_6 = \xi_7 = \xi_9 = \xi_{10} = \xi_{12} = 0$$

e quella V_2''', descritta Q, appartiene all' S_3 α_3 di equazioni:

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = \xi_5 = \xi_7 = \xi_8 = \xi_{10} = \xi_{11} = 0$$

Risulta poi evidente che le tre superficie V'_2, V''_2, V'''_2 sono riferite fra loro proiettivamente.

Sia S^*_6, uno degli S_6 generatori delle V_8, individuato dai sette punti indipendenti: P_1, P, Q, P'_1, P'_{y1}, Q'_{x1}, Q'_{y1}, ove si è posto:

$$P'_{x_1} = \left(0,\ \frac{\partial\Theta_1}{\partial\, x_1},\ 0,\ 0,\ \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1},\ 0, 0,\ \frac{\partial\Theta_3}{\partial x_1},\ 0, 0,\ \frac{\partial\Theta_4}{\partial x_1},\ 0 \right)$$

$$P'_{y1} \equiv \left(0, \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_3}{\partial y_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_4}{\partial y_1}, 0 \right)$$

$$Q'_{x1} \equiv \left(0, 0, \frac{\partial\Theta_1}{\partial x_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_2}{\partial x_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_3}{\partial x_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_4}{\partial x_1} \right)$$

$$R_1 \equiv \left(0, 0, \frac{\partial\Theta_1}{\partial y_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_2}{\partial y_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_3}{\partial y_1}, 0, 0, \frac{\partial\Theta_4}{\partial y_1} \right)$$

Poichè il piano individuato dai punti P, P'_{x1}, P'_{y1} è tangente alla V''_2 in P (supposto semplice) ed il piano Q, Q'_{x1}, Q'_{y1}, è tangente alla V'''_2 in Q (anch' esso supposto semplice) si deduce che S^*_6 congiunge il punto P_1 di V'_2 col piano tangente a V''_2 in P col piano tangente a V'''_2 in Q, dove P_1, P e Q sono punti corrispondenti nelle proiettività fra gli S_3 α_1 α_2 ed α_3. Dunque:

la varietà V_8 di S_{11} contiene ∞^2 S_6 generatori ottenuti congiungendo ogni punto semplice P_1 della superficie iperellittica V'_2 di α_1 con il piano tangente alla superficie iperellittica V''_2 di α_2 nel punto P omologo di P_1 nella proiettività fra α_1 ed α_2 e col piano tangente alla superficie iperellittica V'''_2 di α_3, nel punto Q, omologo di P_1 nella proiettività fra gli S_3 α_1 ed α_3.

Si osservi ora che se I $(R_1\ R_2\ R_3\ R_4) = 0$ è l'equazione algebrica della superficie iperellittica triduale in esame, quest' equazione equivale nel campo complesso al sistema:

$$\begin{cases} I(\rho_1\ \rho_2\ \rho_3\ \rho_4) = 0 & (9) \\ \dfrac{\partial I}{\partial \rho_1}\sigma_1 + \dfrac{\partial I}{\partial \rho_2}\sigma_2 + \dfrac{\partial I}{\partial \rho_3}\sigma_3 + \dfrac{\partial I}{\partial \rho_4}\sigma_4 = 0 & (10) \\ \dfrac{\partial I}{\partial \rho_1}\tau_1 + \dfrac{\partial I}{\partial \rho_2}\tau_2 + \dfrac{\partial I}{\partial \rho_3}\tau_3 + \dfrac{\partial I}{\partial \rho_4}\tau_4 = 0 & (11) \end{cases}$$

Dunque la V_8 di S_{11} è l' intersezione delle tre ipersuperficie dell' S_{11} le cui equazioni si ricavano da queste ora scritte sostituendovi le σ, le ρ e le τ con le coordinante correnti ξ_i.

La (9) interpretata nell' S_3 α_1 dà la V'_2, interpretata nella S_{11} dà invece un ipercono che proietta la V'_2 di α_1 dall' S_7 A di equazioni

$$\xi_1 = \xi_4 = \xi_7 = \xi_{10} = 0.$$

Le (10) e (11) sono le equazioni di due V_{10} di S_{11} per le quali l' $S_7 A$ è (n-1)plo se n è il grado di I.

Ogni S_8 generatore dell' ipercono (9) contiene un S_6 generatore della V_8, S_6 che è, fuori di A, l' intersezione delle tre ipersuperficie di equazioni (9), (10 ed (11). Se però l'S_8 generatore dell' ipercono (9) è multiplo, perchè proietta da A un punto M_1, multiplo della V'_2, allora esso apparterà alle due V_{10} di equazioni (10) ed (11); dunque:

la V_8 *di* S_{11} *contiene ogni* S_8 *di* S_{11} *ottenuto proiettando dall'* S_7 A *ogni punto multiplo della superficie iperellittica* V'_2 *dell'* S_8.

Per determinare un modello proiettivo nell' S_{11} complesso della superficie triduale iperellittica in esame consideriamo la prima rappresentazione complessa dell' S_3 triduale E' noto che essa si realizza mediante un 9-complesso di piani costituito dai piani di S_{11} appoggiati all' S_7 A e giacenti negli S_6 che da A proiettano i punti P_1 di α_1.

Se F_1 è un punto semplice della V_2 di α_1 dentro l' S_8 congiungente A con P, si ha un S_6 generatore della V_8 e precisamente quello individuato dai punti P_1, P, Q, P'_{x1}, P'_{y1}, Q'_{x1}, Q'_{y1}, sicchè dentro questo S_6 generatore avremo ∞^4 piani del 9-complesso: quelli uscenti dalla retta PQ, ma non appartenenti all' S_5 individuato dai due piani tangenti alle V''_2 e V'''_2 rispettivamente in P e Q.

Se invece P_1 è multiplo per la V'_2, tutto l' S_8 individuato da P_1 e da A appartiene alla V_8 e quindi tutti i piani del 9-complesso contenuti in questo S_8 passanti per la retta PQ e non appartenenti ad A rappresentano punti della superficie iperellittica triduale; dunque:

Un modello proiettivo dell' ente, a sei dimensioni complesse, costituito dalla superficie iperellittica triduale è dato da ∞^6 *piani del 9 - complesso di piani, rappresentativo dell'* S_3 *triduale. Tali piani sono quelli degli* ∞^2 S_6 *generatore della* V_8 *di* S_{11}; *individuati dai punti* P_1, P, Q, P'_{x1} P'_{y1}, Q'_{x1}, Q'_{y1}.

In ciascuno di tali S_6 *i piani del 9 - complesso che appartengono al modello in esame sono gli* ∞^4 *piani uscenti dalla retta* PQ *e non appartenenti all'* S_5 *individuato dai punti* P, Q, P'_{x1}, P'_{y1}, Q'_{x1}, Q'_{y1}.

Inoltre alla detta totalità ∞^6 *di piani appartengono anche i piani uscenti da ciascun punto multiplo* M *di* V_2, *non giacenti in* A, *appartenenti all'* S_8 *congiungente* A *col punto* M_1, *multiplo della* A'_2, *omologo di* M *nella proiettività di equazioni:*

$$\begin{cases} \xi_1 = \rho_1 \\ \xi_4 = \rho_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_7 = \rho_3 \\ \xi_{10} = \rho_4 \end{cases}$$

E' facile dimostrare che, definita nell' S_3 triduale una qualunque tra-

sformazione birazionale Ψ e dette V_2 e V'_2 le due superficie iperellittiche triduali l' una trasformata birazionale dell' altra, la Ψ subordina nell' S_{11} un' analoga trasformazione birazionale, che muta la V_8, relativa alla superficie V_2, nella V_8 relativa alla V'_2, e inoltre fissa tra i due modelli proiettivi delle V_2 e V'_2 una corrispondenza biunivoca.

Teoremi di unicità per le soluzioni di un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine

Nota del dott. **Emilio Gagliardo**, *presentata dal socio corr.* **G. Stampacchia**

(Adunanza del dì 7 maggio 1955)

Sunto. – Si considera un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine e di tipo normale. I criteri di unicità per il problema di valori iniziali che estendono il classico criterio di Lipschitz vengono generalizzati in relazione alle diverse classi di funzioni ove si cerca la soluzione. Per le soluzioni intese nel senso di Carathéodory viene stabilito un teorema di unicità che generalizza alcuni teoremi dovuti a F. Cafiero ed a G. Zwiener i quali contengono, a loro volta, molti criteri di vari Autori.

Il problema di stabilire, per le soluzioni dell' equazione $y' = f(x, y)$, teoremi di unicità rispetto al valore iniziale che generalizzano il classico criterio di Lipschitz può essere approfondito in diverse direzioni in relazione alla diversa classe di funzioni ove si cerca la soluzione.

Per le soluzioni intese nel senso di Carathéodory, cioè come funzioni assolutamente continue soddisfacenti quasi ovunque all' equazione, sono di fondamentale importanza due Memorie di F. Cafiero [1]) nelle quali molti criteri di vari Autori vengono inquadrati in un' unica visione e generalizzati. Particolarmente notevole è un teorema [2]) stabilito nella seconda di queste Memorie; esso — come anche una sua formulazione più affinata dovuta a G. Zwirner [3]) — contiene tutti i teoremi stabiliti nella prima Memoria tranne una semplice estensione [4]) di uno di questi [5]).

[1]) F. Cafiero, *Sui teoremi di unicità relativi ad un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine*, Giornale di Mat. di Battaglini, (4), 78, Memoria I pp. 10-41, Memoria II pp. 193-215, (1948).

[2]) Teorema I) della Memoria II, p. 195.

[3]) G. Zwirner, *Criteri di unicità per gli integrali delle equazioni differenziali del primo ordine*, Rend. Sem. Mat. di Padova, 19, 273-293, (1950) n. 7. Cfr. anche il criterio del n. 6.

[4]) Esposta nella nota (36) della citata Memoria I. Cfr. nota (7) della Memoria II.

[5]) Teorema C) della Memoria I. p. 32.

Se invece le soluzioni sono intese come funzioni assolutamente continue dotate *ovunque* di derivata (anche soltanto destra) e soddisfacenti *ovunque* all' equazione (con la derivata destra), oppure come funzioni assolutamente continue soddisfacenti quasi ovunque all' equazione ma dotate *ovunque* di numeri derivati (destri) finiti — e le diremo rispettivamente soluzioni di tipo (α) o (β) — si possono dare, come ho mostrato in un precedente lavoro [6]), criteri di unicità che non sussistono quando le soluzioni sono intese nel senso di CARATHÉODORY.

Nel presente lavoro mi riferisco al teorema di CAFIERO citato in [5]) e mostro che se si sopprime del tutto l' ipotesi di uniforme continuità rispetto ad y della $f(x, y)$, [7]), si ottiene un teorema che non è più valido se le soluzioni sono intese nel senso di CARATHÉODORY, ma sussiste in relazione alle soluzioni di tipo (α).

E' poi notevole il fatto che se si aggiunge un' ipotesi supplementare meno restrittiva di quella soppressa, [8]), si ottiene in modo semplice un teorema di unicità valido anche se le soluzioni sono intese nel senso di CARATHÉODORY. Tale teorema generalizza tutti quelli di CAFIERO relativi a questo tipo di soluzioni, ed una sua formulazione più affinata contiene anche il citato teorema di ZWIRNER.

Introducendo invece un' ipotesi supplementare ancora meno restrittiva si ottiene un teorema valido in relazione alle soluzioni di tipo (β).

Viene così risolta la questione di generalizzare, in analogia alle ricerche di CAFIERO, i criteri relativi ai diversi tipi di soluzioni [9]), collegando vantaggiosamente i risultati.

1. — Stabiliamo in questo numero un teorema di unicità che sussiste in relazione alle soluzioni di tipo (α), intese come funzioni assolutamente continue dotate *ovunque* di derivata destra e soddisfacenti *ovunque* alla equazione differenziale con la loro derivata destra.

Le ipotesi di questo teorema si ottengono generalizzando quelle di un teorema di CAFIERO [5]) ove si sopprima completamente l' ipotesi di uniforme continuità rispetto ad y della funzione $f(x, y)$, [7]).

TEOREMA. — *Data la funzione* f (x, y) *definita nell' insieme chiuso :*

$$C \ : \ a \leq x \leq b, \qquad y \subset E_x \qquad ^{10})$$

[6]) E. GAGLIARDO, *Un' osservazione sui criteri di unicità per gli integrali di una equazione differenziale ordinaria del primo ordine,* Rend. Sem. Mat. di Padova, 23, 214-223, (1954).

[7]) e precisamente intendiamo di sopprimere anche la condizione meno restrittiva con la quale si ottiene l' estensione citata in [4]).

[8]) e meno restrittiva di quella formulata nel criterio citato in [4]).

[9]) come quelli citati in [6]).

[10]) con E_x indichiamo un insieme numerico chiuso dipendente da x.

supponiamo che per ogni punto P (ξ, η), $\xi < b$, *di* C, *esista un suo intorno destro:* $\xi \leqq x \leqq \xi + k$, $\eta - k \leqq y \leqq \eta + k$, *tale che, fissato un numero* $\varepsilon > 0$ *ed un punto* ψ *interno all'intervallo* $[\xi, \xi + k]$, *si possa trovare una funzione* $F_{P,\varepsilon,\psi}(x, u)$ *in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

i_1) *La funzione* $F_{P,\varepsilon,\psi}(x, u)$ *soddisfa alle ipotesi di* CARATHÉODORY [11]) *in ogni campo del tipo:*

$$\xi + \rho \leqq x \leqq \psi \ , \ \rho \leqq u < +\infty \quad , \quad (0 < \rho < \psi - \xi)$$

i_2) *Risulta:*

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leqq F_{P,\varepsilon,\psi}(x, y_1 - y_2) \quad , \quad (\eta - k \leqq y_2 < y_1 \leqq \eta + k)$$

quasi ovunque in $[\xi, \psi]$.

i_3) *Si possono determinare un* $h > 0$ *ed una successione infinitesima di numeri positivi:* $\{\delta_n\} \to 0$, *in modo che per ogni* δ_n, *l'integrale superiore* [12]) *dell'equazione:*

$$(1) \qquad u = h\,\delta_n + \int_{\xi + \delta_n}^{x} F_{P,\varepsilon,\psi}(t, u)\, dt$$

soddisfi alla limitazione: $u(\psi) < \varepsilon$, [13]).

Allora le eventuali soluzioni di tipo (α) *dell'equazione differenziale:*

$$(2) \qquad y' = f(x, y)$$

sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.

Supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni di tipo (α) della (2), $y_1(x)$, $y_2(x)$, uscenti da uno stesso punto (x_0, y_0) di C.

---

[11]) Si suppone cioè $F_{P,\varepsilon,\psi}(x, u)$ misurabile rispetto ad x per ogni fissato $u > 0$, e continua rispetto ad u per quasi tutti gli x in $[\xi, \psi]$, e tale che per ogni $0 < \rho < \psi - \xi$ si possa trovare una funzione $q_\rho(x)$ sommabile in $[\xi + \rho, \psi]$ in modo da aversi: $| F_{P,\varepsilon,\psi}(x, u) | \leqq q_\rho(x)$ per $\xi + \rho \leqq x \leqq \psi$, $\rho \leqq u < +\infty$.

[12]) Per le considerazioni svolte da CAFIERO nel lavoro citato in [1]), Memoria I, § 1, tale integrale superiore esiste in un intorno nel punto iniziale (in conseguenza dell'ipotesi i_1).

[13]) Precisamente soddisfi a questa limitazione se il puuto ψ appartiene al suo intervallo di esistenza.

[14]) Loc. cit. in [1]) pp. 19-20.

Esiste allora almeno un punto ξ_0 a destra di x_0 in cui, per fissare le idee, risulta: $y_1(\xi_0) > y_2(\xi_0)$. Indichiamo con $[\xi, \xi_0]$ il massimo intorno sinistro di ξ_0 nell'interno del quale è verificata la relazione:

$$y_1(x) > y_2(x)$$

e chiamiamo η il comune valore di $y_1(x)$, $y_2(x)$ in ξ.

Determinato l'intorno: $\xi \leqq x \leqq \xi + k$, $\eta - k \leqq y \leqq \eta + k$ corrispondente al punto $P(\xi, \eta)$ di C, consideriamo un punto ψ interno a entrambi gli intervalli: $[\xi, \xi + k]$, $[\xi, \xi_0]$, tale che risulti:

$$(3) \qquad |\eta - y_1(x)| \leqq k \quad , \quad |\eta - y_2(x)| \leqq k \quad , \quad \text{per } \xi \leqq x \leqq \psi$$

Essendo:

$$(4) \qquad y_1(x) - y_2(x) > 0 \qquad \text{per } \xi < x \leqq \psi,$$

posto:

$$(5) \qquad \omega(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

possiamo assumere $\varepsilon = \omega(\psi)$, e indicare con $F_{P,\varepsilon,\psi}(x, u)$, h, $\{\delta_n\}$ la funzione e le costanti soddisfacenti alle $i_1)$ $i_2)$ $i_3)$.

Poichè le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$ devono soddisfare (almeno con la loro derivata destra) alla stessa equazione differenziale anche nel punto $P(\xi, \eta)$, la loro differenza è, per $x \to \xi +$, infinitesima di ordine superiore al primo, e cioè:

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega(\xi + \delta)}{\delta} = 0$$

Esisterà quindi un numero della successione $\{\delta_n\}$, (con $\xi + \delta_n < \psi$), tale che:

$$(6) \qquad \omega(\xi + \delta_n) < h\delta_n .$$

Per le (3), (4), e per la $i_2)$, risulta: $\omega'(x) \leqq F_{P,\varepsilon,\psi}\big(x, \omega(x)\big)$ quasi ovunque in $[\xi, \psi]$, e quindi, tenendo conto della (6), per un noto teorema di confronto [14]) l'integrale superiore dell'equazione (1) sarebbe definito in tutto $[\xi + \delta_n, \psi]$ e dovrebbe soddisfare ivi alla limitazione: $u(x) \geqq \omega(x)$. Ma ciò è assurdo perchè in particolare per $x = \psi$ si otterrebbe:

$$u(\psi) \geqq \omega(\psi) = \varepsilon$$

contrariamente a quanto si è supposto nell'ipotesi $i_3)$.

2. — Dal teorema del n. 1 si deduce in particolare il seguente criterio: *Sia* $f(x; y)$ *una funzione reale definita nella striscia* $S: a \leqq x \leqq b$, $|y| < +\infty$.

Per ogni punto α ($\neq$ b) *dell'intervallo* [a, b] *si possano determinare: un punto* $\bar{\alpha} > \alpha$, *una funzione* $\omega(u)$ *continua e positiva per* u > 0, *ed una funzione* φ (x) *sommabile in ogni intervallo* $[\alpha + \delta, \bar{\alpha}]$, *con* $\delta > 0$, *in modo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:*

j_1) *Risulta:*

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leqq \varphi(x)\, \omega(y_1 - y_2) \qquad , \quad (y_1 > y_2)$$

quasi ovunque in $[\alpha, \bar{\alpha}]$.

j_2) *Fissato un numero* $\varepsilon > 0$ *ed un punto* ψ *interno all'intervallo* $[\alpha, \bar{\alpha}]$ *si possono determinare un* h > 0 *ed una successione infinitesima di numeri positivi:* $\{\delta_n\} \to 0$ *tali che risulti:*

$$\int_{\alpha+\delta_n}^{\psi} \varphi(x)\, dx \leqq \int_{h\delta_n}^{\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)} \tag{7}$$

Allora le eventuali soluzioni di tipo (α) *dell'equazione* (2) *sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.*

A tale scopo dimostriamo che facendo corrispondere ad un punto P (α, β) di S la costante $k = \bar{\alpha} - \alpha$ e la funzione $F_P(x, u) = \varphi(x)\, \Omega(u)$, con $\Omega(u) = \omega(u)$ per $0 < u \leqq 2k$, $\Omega(u) = \omega(2k)$ per $u > 2k$, risultano verificate le ipotesi del teorema del n. 1. L'ipotesi i_1) è ovviamente soddisfatta, e la i_2) è conseguenza della j_1). Resta da dimostrare che l'ipotesi i_3) segue dalla j_2). Detto $u(x)$ l'integrale superiore della (1) si ha, quasi ovunque: $u'(x) = \varphi(x)\, \Omega\big(u(x)\big)$ e di qui

$$\int_{\alpha+\delta_n}^{\psi} \varphi(x)\, dx = \int_{\alpha+\delta_n}^{\psi} \frac{u'(x)\, dx}{\Omega(u(x))} = \int_{h\delta_n}^{u(\psi)} \frac{d\, u}{\Omega(u)}$$

e persistendo l'ipotesi j_2) anche con $\Omega(u)$ al posto di $\omega(u)$, (e col segno $<$ al posto di $\leqq$), si ottiene:

$$\int_{h\delta_n}^{u(\psi)} \frac{du}{\Omega(u)} < \int_{h\delta_n}^{\varepsilon} \frac{du}{\Omega(u)}$$

e cioè, essendo $\Omega(u) > 0$, $u(\psi) < \varepsilon$

Se nel criterio ora dedotto dal teorema del n. 1 si assume in particolare $\omega(u) = u$ si ottiene un criterio di unicità che ho stabilito in un precedente lavoro [6]).

Infatti per $\omega(u) = u$ la (7) diventa:

$$\int_{\alpha+\delta_n}^{\psi} \varphi(x)\,dx - \int_{h\delta_n}^{\varepsilon} \frac{du}{u} = \int_{\alpha+\delta_n}^{\bar{\alpha}} \varphi(x)\,dx + \log \delta_n +$$

$$+ \left[\left(- \int_{\psi}^{\alpha} \varphi(x)\,dx - \log \varepsilon \right) + \log h \right] \leq 0$$

Fissare ad arbitrio ψ (interno ad $[\alpha, \bar{\alpha}]$) ed ε (>0) equivale a fissare ad arbitrio la costante entro parentesi rotonda, e poter poi disporre di h (>0) equivale a poter disporre, in definitiva, della costante entro parentesi quadra.

Come si vede per $\omega(u) = u$ l'ipotesi j_2) equivale a quella di poter trovare una successione positiva infinitesima $\{\delta_n\}$ tale che l' espressione:

$$\int_{\alpha+\delta_n}^{\bar{\alpha}} \varphi(x)\,dx + \log \delta_n$$

resti superiormente limitata per $n \to +\infty$; ma ciò si può anche esprimere scrivendo:

$$\underset{\delta \to 0+}{\text{minlim}} \int_{\alpha+\delta}^{\alpha} \left[\varphi(x) - \frac{1}{x-\alpha} \right] dx < +\infty$$

e questa è appunto l'ipotesi formulata nel criterio citato [6]).

Tenendo presente che quest' ultimo non è valido se le soluzioni sono intese nel senso di Carathéodory [15]) altrettanto può dirsi dei teoremi finora stabiliti in questo lavoro.

3. — Una volta stabilita, con uno dei criteri precedenti, l'unicità delle soluzioni di tipo (α), si può facilmente stabilire anche l' unicità delle soluzioni nel senso di Carathéodory purchè si introduca un' opportuna ipotesi supplementare.

La più semplice di tali ipotesi è la continuità della funzione $f(x, y)$,

---

[15]) Cfr. loc. cit. in [6]) p. 217, 5° alinea.

o anche soltanto l' uniforme continuità rispetto ad y della $f(x, y)$ in un intorno di ogni punto del suo insieme C di definizione, [16]).

Più generalmente supponiamo che *per ogni punto* (ξ, η) di C, dato $\sigma > 0$ *si possa determinare* $K > 0$ *in modo che risulti*

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \leqq \sigma \qquad , \qquad (\eta - K \leqq y_2 < y_1 \leqq \eta + K)$$

quasi ovunque in $(\xi, \xi + K)$, [17]).

In tal caso le ipotesi dei teoremi precedenti diventano sufficienti ad assicurare che tutte le soluzioni nel senso di Carathéodory *sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.*

Indicando con $y_1(x)$, $y_2(x)$ due soluzioni nel senso di Carathéodory uscenti da uno stesso punto di C, ci si può ridurre, in base alle prime considerazioni svolte nella dimostrazione del teorema del n. 1, ad avere

$$(8) \qquad \begin{cases} y_1(\xi) = y_2(\xi) = \eta \\ y_1(x) > y_2(x) \quad \text{per } \xi < x \leqq \xi_0 \end{cases}$$

Fissato ora $\sigma > 0$ è possibile, per l' ipotesi supplementare introdotta, determinare $\delta_\sigma > 0$ tale che per $0 < \delta \leqq \delta_\sigma$ si abbia:

$$y_1(\xi + \delta) - y_2(\xi + \delta) = [\, y_1(\xi + \delta) - y_1(\xi) \,] - [y_2(\xi + \delta) - y_2(\xi)\,] =$$

$$= \int_\xi^{\xi+\delta} [\, f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))\,]\, dx \leqq \sigma\delta$$

e cioè, posto:

$$(9) \qquad \omega(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

si ha:

$$(10) \qquad \lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega(\xi + \delta)}{\delta} = 0$$

[16]) Supponendo ad esempio verificata questa ipotesi, e quelle del n. 2, si ottiene una generalizzazione di un criterio di unicità dovuto a G. Scorza-Dragoni. *A proposito di un teorema di Rosenblatt*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (6), 14, 7-11, (1931).

[17]) E' questa una delle ipotesi formulate nel teorema di Cafiero citato in [4]): Il teorema che stabiliremo nel numero seguente si otterrà sostituendo a questa ipotesi una meno restrittiva, cfr. [19]).

Si potranno pertanto riprendere le deduzioni del n. 1.

In altre parole la dimostrazione del n. 1 sussiste se due soluzioni che verificano le (8) verificano anche la (10); ora questo avviene sempre per le soluzioni di tipo (α) ma non sempre per quelle nel senso di CARATHÉODORY; abbiamo però ora visto che questo fatto — che cioè la (10) è conseguenza delle (8) — si verifica anche per le soluzioni nel senso di CARATHÉODORY di quelle equazioni differenziali che soddisfano all' ulteriore ipotesi di questo numero.

4. — I risulati del n. precedente possono essere facilmente estesi in modo da ottenere un teorema di unicità, valido in relazione alle soluzioni nel senso di CARATHÉODORY, che contiene e generalizza tutti i teoremi di CAFIERO, relativi a questo tipo di soluzioni, contenuti nelle due citate Memorie [1]).

TEOREMA. — *Data la funzione* f (x, y) *definita nell' insieme chiuso :*

$$C: \quad a \leqq x \leqq b \qquad y \subset E_x$$

supponiamo che siano verificate le ipotesi del teorema del n. 1.

Supponiamo inoltre che per ogni punto P (ξ, η), $\xi < b$, *di* C, *fissato* $\varepsilon > 0$, *si possa determinare un intorno destro di* P, [18]), : $\xi \leqq x \leqq \xi + K$, $\eta - K \leqq y \leqq \eta + K$, *tale che, fissato un punto* Ψ *interno all' intervallo* $[\xi, \xi + K]$ *si possa trovare una funzione* $G_{P,\varepsilon,\Psi}(x, U)$ *in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni* [19]) :

I_1) *La funzione* $G_{P,\varepsilon,\Psi}(x, U)$ *soddisfa alle ipotesi di* CARATHÉODORY *in ogni campo del tipo :*

$$\xi + \rho \leqq x \leqq \Psi \quad , \quad \rho \leqq U < +\infty \quad , \quad (0 < \rho < \Psi - \xi) .$$

I_2) *Risulta :*

$$f(x\, y_1) - f(x\, y_2) \leqq G_{P,\varepsilon,\Psi}(x, y_1 - y_2), \quad (\eta - K \leqq y_2 < y_1 \leqq \eta + K)$$

quasi ovunque in $[\xi, \Psi]$.

I_3) *Si possono determinare un* $H > 0$ *ed una successione infini-*

[18]) E' importante osservare che questo intorno dipende ora in generale dalla scelta di ε; se in particolare si suppone di poterlo fissare indipendentemente da ε le ipotesi del teorema del n. 1 diventano superflue perchè contenute in questo.

[19]) Che sono certamente verificate se lo sono quelle esposte nel n. precedente; ciò risulta chiaro prendendo: $G = \sigma = \frac{\varepsilon}{2}$, $H = \frac{1}{2}(\Psi - \xi)\,\varepsilon$.

tesima di numeri positivi $\{\Delta_n\} \to 0$ *in modo che l'integrale superiore dell'equazione :*

$$(11) \qquad U = H + \int_{\xi+\Delta_n}^{x} G_{P,\varepsilon,\Psi}\,(t,\,U)\,dt$$

soddisfi alla limitazione : $U(\Psi) < (\Psi - \xi)\,\varepsilon$.

Allora le eventuali soluzioni nel senso di CARATHÉODORY *dell'equazione* (2) *sono, a destra del punto iniziale, univocamente determinate dal valore iniziale.*

Per le osservazioni fatte nel n. precedente basta dimostrare che nelle ipotesi ora esposte la (10) è conseguenza delle (8).

Supponiamo per assurdo che, pur verificandosi le (8), la (10) non sia soddisfatta.

Posto, come al solito :

$$(12) \qquad \omega(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

possiamo allora fissare un $\varepsilon > 0$ soddisfacente alla limitazione :

$$(13) \qquad \varepsilon < \max\lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega(\xi+\delta)}{\delta},$$

e indicare con K il numero positivo corrispondente.

Si può ora fissare un punto Ψ interno agli intervalli $[\xi, \xi_0]$, $[\xi, \xi + K]$, tale che

$$(14) \qquad |\eta - y_1(x)| \leqq K, \quad |\eta - y_2(x)| \leqq K, \quad \text{per } \xi \leqq x \leqq \Psi,$$

in modo che risulti :

$$\frac{\omega(\Psi)}{\Psi - \xi} \geqq \varepsilon,$$

e indicare con H, $\{\Delta_n\}$ le costanti positive corrispondenti per l'ipotesi I_3). Scegliamo una delle costanti Δ_n in modo che si abbia :

$$(15) \qquad \omega(\xi + \Delta_n) < H$$

come è lecito dal momento che $\omega(\xi) = 0$.

Ciò posto osserviamo che essendo verificate le (8), (14), per l'ipotesi I_3) risulta : $\omega'(x) \leqq G_{P,\varepsilon,\Psi}(x,\,\omega(x))$ quasi ovunque in $[\xi, \Psi]$, e quindi, tenendo conto della (15), per un citato teorema di confronto [14]), l'integrale

superiore [20]) dell' equazione (11) sarebbe definito in tutto $[\xi + \Delta_n, \Psi]$ e dovrebbe soddisfare ivi alla limitazione: $U(x) \geq \omega(x)$. Ma ciò è assurdo perchè in particolare per $x = \Psi$ si otterrebbe: $U(\Psi) \geq \omega(\Psi) \geq (\Psi - \xi)\,\varepsilon$, contrariamente a quanto si è supposto nell' ipotesi I_3).

Il teorema resta così dimostrato.

OSSERVAZIONE: Se nelle ipotesi del n. 1 si ammette che l'integrale superiore $u(x)$ *dell' equazione* (1) *soddisfi alla limitazione:* $u(x) < \gamma(x)$, *con* $\gamma(x)$ *positiva e semicontinua inferiormente a destra di ogni suo punto, è allora sufficiente supporre verificata la* i_2) *per* $y_1 - y_2 < \gamma(x)$.

Se anche la funzione continua $\omega(x)$ soddisfa alla: $\omega(x) < \gamma(x)$ ciò non altera la dimostrazione; in caso contrario detto ξ^* il primo punto — certamente esistente — in cui $\omega(\xi^*) \geq \gamma(\xi^*)$, restano valide nell' intervallo $[\xi, \xi^*]$ le deduzioni fatte al n. 1 per stabilire la disuguaglianza $u(x) \geq \omega(x)$, e si giunge così ad un assurdo perchè non potrebbe essere verificata per $x = \xi^*$ l' ipotesi $u(x) < \gamma(x)$.

La stessa osservazione puó ripetersi per l' integrale superiore della (11) *e per l'ipotesi* I_2).

Non è difficile mostrare che il teorema di unicità stabilito in questo numero contiene tutti i teoremi citati di CAFIERO [1]) relativi alle soluzioni intese nel senso di CARATHÉODORY.

Esso contiene ovviamente il teorema C) della Memoria I, ed anche una sua estensione (citata in [4])) che si ottiene sostituendo all' ipotesi di uniforme continuità rispetto ad y della $f(x, y)$ l' ipotesi esposta al n. 3 del presente lavoro; questa infatti è a sua volta un caso particolare di quella formulata in questo numero (cfr. [19])). Il teorema A) della Memoria I ed il teorema I) della Memoria II si ottengono nel caso particolare esposto in nota [18]), tenendo conto, per il secondo di questi, dell' OSSERVAZIONE precedente, con $\gamma(x) = \nu$ per $\xi \leq x \leq \xi + \delta_1$, $\gamma(x) = \varepsilon$ per $\xi + \delta_1 < x \leq \xi + \delta_2$.

Al teorema stabilito in questo numero possiamo dare una formulazione più affinata in modo da contenere anche il citato teorema di ZWIRNER [3]).

A tale scopo indichiamo con $\Phi(x, v, w)$ una funzione definita e continua con le sue derivate parziali prime per $a \leq x \leq b$ e per ogni coppia di valori v, w di E, con $v \geq w$, positiva per $v > w$ e nulla per $v = w$, e sostituiamo alle i_2), I_2) le ipotesi seguenti:

i_2^*) **Risulta:**

$$\Phi'_x(x, y_1, y_2) + \Phi'_v(x, y_1, y_2)\, f(x, y_1) + \Phi'_w(x, y_1, y_2)\, f(x, y_2) \leq F_{P,\varepsilon,\psi]}\big(x, \Phi(x, y_1, y_2)\big)$$

quasi ovunque in $[\xi, \psi]$.

[20]) che, per l' ipotesi I_1), esiste almeno in un intorno del punto iniziale. Cfr. [12]).

I_2^*) Risulta: $\Phi'_x(x, y_1, y_2) + \Phi'_v(x, y_1, y_2) f(x, y_1) + \Phi'_w(x, y_1, y_2) f(x, y_2) \leqq G_{P,\varepsilon,\Psi}\left(x, \Phi(x, y_1, y_2)\right)$

quasi ovunque in $[\xi, \Psi]$.

Con ciò la dimostrazione sussiste inalterata purchè si ponga, in luogo delle (5), (9), (12): $\omega(x) = \Phi\left(x, y_1(x), y_2(x)\right)$, è cioè si supporrà, seguendo la dimostrazione del n. 1, che la funzione $\omega(\xi+\delta) = \Phi(\xi+\delta, y_1(\xi+\delta), y_2(\xi+\delta))$ sia per $\delta \to 0+$ infinitesima di ordine superiore al primo, vale a dire che soddisfi la (10), e si farà l'ipotesi contraria seguendo la dimostrazione del n. 4.

Si tenga infine conto dell' OSSERVAZIONE precedente, che può essere riferita alle ipotesi i^*_2), I^*_2), purchè naturalmente si ponga in luogo della $y_1 - y_2 < \gamma(x)$, la: $\Phi(x, y_1, y_2) < \gamma(x)$.

5. — Ci riferiamo in questo numero alle soluzioni di tipo (β), e cioè alle soluzioni — nel senso di CARATHÉODORY dotate *ovunque* di numeri derivati destri finiti.

TEOREMA. — *In relazione alle soluzioni di tipo* (β) *le ipotesi del teorema dato al n. 4 possono essere rese meno restrittive sostituendo all' equazione* (11) *la:*

$$U = \frac{\Delta_n}{\varepsilon} + \int_{\xi+\Delta_n}^{x} G_{P,\varepsilon,\Psi}(t, U)\, dt$$

e sopprimendo la costante H.

La dimostrazione si ottiene in modo analogo: basta osservare che nel caso presente la differenza $y_1(x) - y_2(x)$ ha numeri derivati destri finiti in $x = \xi$, e pertanto il numero $\varepsilon > 0$ soddisfacente alla (13) può essere scelto in modo che risulti inoltre:

$$\omega(\xi + \delta) < \frac{\delta}{\varepsilon} \qquad (\text{per } 0 < \delta \leqq \xi_0 - \xi).$$

Introdotto il numero K, il punto Ψ, e le costanti Δ_n, si ha allora, per una qualsiasi di queste ultime, in luogo della (15): $\omega(\xi + \Delta_n) < \dfrac{\Delta_n}{\varepsilon}$,

e di qui si procede come al n. 4.

Analogamente a quanto si è fatto al n. 2 per le soluzioni di tipo (α) possiamo ora dedurre dal teorema precedente alcuni semplici criteri di unicità per le soluzioni di tipo (β).

Limitiamoci per semplicità al caso particolare del teorema ora stabilito nel quale anche il numero K (come k) si può determinare indipendentemente da ε, [21]).

Si vede allora facilmente che tutte le ipotesi sono soddisfatte se si suppongono verificate quelle del n. 2 ove si ponga in luogo della (7) la condizione:

$$\int_{\alpha+\delta_n}^{\psi} \varphi(x)\,dx \leqq \int_{\frac{\delta_n}{\varepsilon}}^{(\psi-\xi)\varepsilon} \frac{du}{\omega(u)}$$

Quest' ultima, assumendo in particolare $\omega(u) = u$, diventa:

$$\int_{\alpha+\delta_n}^{\overline{\alpha}} \varphi(x)dx + \log \delta_n + \left[- \int_{\psi}^{\overline{\alpha}} \varphi(x)\,dx - 2 \log \varepsilon - \log(\psi - \alpha) \right] \leqq 0$$

Fissare ad arbitrio ψ (interno ed $(\alpha, \overline{\alpha}]$) ed $\varepsilon > 0$, equivale a fissare ad arbitrio la costante entro parentesi quadra, e dunque poter soddisfare alla relazione precedente con una opportuna successione infinitesima $\{\delta_n\}$ equivale a supporre:

$$\underset{\delta \to 0+}{\mathit{minlim}} \int_{\alpha+\delta}^{\overline{\alpha}} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x-\alpha} \right) dx = -$$

Si ritrova così un criterio di unicità stabilito in un precedente lavoro. (Cfr. [6]) n. 5). Esso non sussiste se le soluzioni sono intese nel senso di CARATHÉODORY, e dunque altrettanto può dirsi per tutti i teoremi di questo numero.

---

[21]) Si può allora ripetere l' osservazione fatta in [18]).

Premesse all'introduzione del calcolo a rottura nella pratica tecnica.

Nota del prof. **Vincenzo Franciosi**, *presentata dal socio ord.* **A. Galli**

(Adunanza del dì 4 giugno 1955)

Sunto. — Si fornisce la dimostrazione dei teoremi di Greenberg e Feinberg generalizzati, nell' ipotesi di coesistenza di caratteristiche dello sforzo di tipo diverso, di carico non proporzionale, e di dominio di snervamento di forma qualsiasi, purchè convesso. Si generalizza il procedimento di Greenberg per ricavare in qualsiasi caso limitazioni inferiori e superiori del coefficiente di sicurezza a rottura.

1. — *Premessa.* — Il più recente tipo di calcolo a rottura delle strutture iperstatiche, noto sotto il nome di « limit design », si articola sui due teoremi di Greenberg e Feinberg, che permettono la definizione di un intervallo in cui il coefficiente di sicurezza è compreso, e garantiscono così al tendere di questo intervallo a zero, l' unicità del coefficiente stesso.

Tali teoremi sono stati però dimostrati nell' ipotesi molto restrittiva che una sola caratteristica dello sforzo condizioni il problema; la loro estensione alle strutture ove giocano ruoli notevoli sia il momento flettente che lo sforzo normale, in cui spesso ci si imbatte nel dominio delle ossature da ponte, ne allarga praticamente la portata a tutte le strutture mono di mensionali. In una nota precedente [1] si è trattato questo argomento alla luce delle relazioni di ortogonalità dei sottospazi di equilibrio e di compatibilità nell' iperspazio delle tensioni; in altre note [2] [3] si è estesa la trattazione ai casi in cui le forze variano non conservando inalterati i mutui rapporti, e la relazione limite fra le caratteristiche di momento flettente e sforzo normale assume particolari aspetti (sezioni di travi in conglomerato armato, o precompresso). Si vuole adesso fornire una dimostrazione di carattere più immediato dei teoremi di Greenberg e Feinberg generalizzati, valida in tutti casi suddetti, e un procedimento che offra in ogni condizione la possibilità di determinare l' intervallo in cui è contenuto il coefficiente di sicurezza, rendendo così operante il " limit design „ nel più spazioso ambito della pratica tecnica.

2. — *Generalizzazione del concetto di cerniera plastica.*

Si consideri (fig. 1) un tronco elementare di trave, sottoposto ad uno sforzo normale N costante, inferiore a quello limite di plasticizzazione

$N_0 = \sigma_0 A$, e ad un momento flettente M variabile. In fase elastica, la rotazione relativa tra le due facce del tronco provocata da una variazione

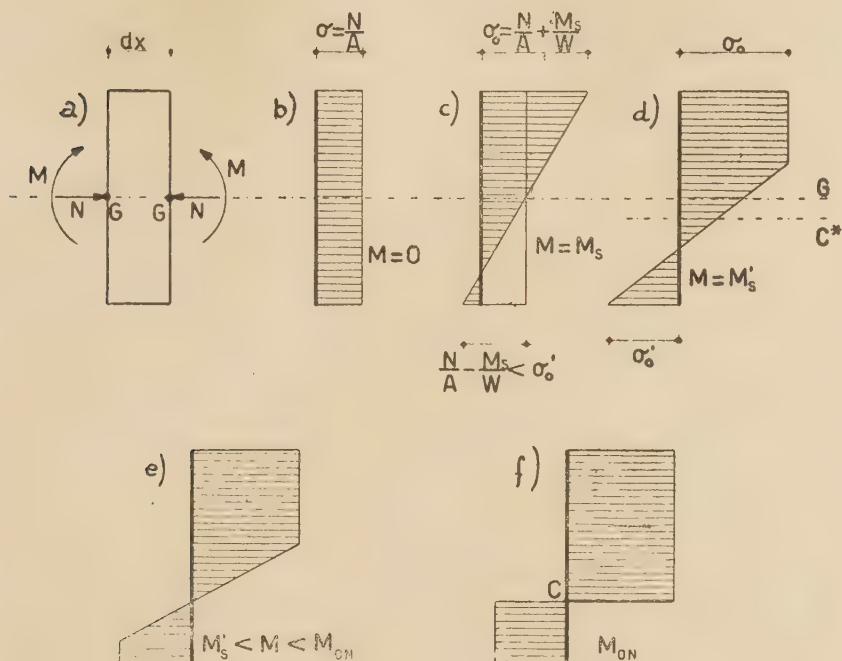



Fig. 1.

Δ M del momento M, è fornita da

$$\Delta\, d\,\varphi = \frac{\Delta\, M\, dx}{E\, I} \tag{1}$$

ed ha luogo intorno ad una retta passante per il baricentro G; all' aumentare di M oltre il valore M_s (fig, 1 c) per cui si verificano le prime deformazioni plastiche in corrispondenza di un bordo, il diagramma delle σ non è più lineare, la rotazione $\Delta\, d\, \varphi$ è ancora proporzionale al momento ΔM, ma secondo un coefficiente più alto di quello fornito dalla (1), e si verifica intorno ad una retta passante per un punto C* diverso da G [1]).

[1]) In fase elasto-plastica è infatti

$$\Delta\, d\,\varphi = \frac{\Delta\, M\, dx}{E\, I^*}$$

essendo I* il momento d' inerzia della sola zona elastica; e così pure C* è il baricentro di questa zona (fig. 1 d).

Al limite, il diagramma delle σ si presenta come nella fig. 1 f, e il coefficiente $\frac{\Delta d\varphi}{\Delta M} = \infty$, essendo $I^* = O$; ciò si verifica per $d\varphi = \infty$, il corrispondente valore limite M_{ON} del momento caratterizza quindi un asintoto. Il diagramma $M \cdot d\varphi$ si presenta come nella fig. 2; sostituendo il diagramma

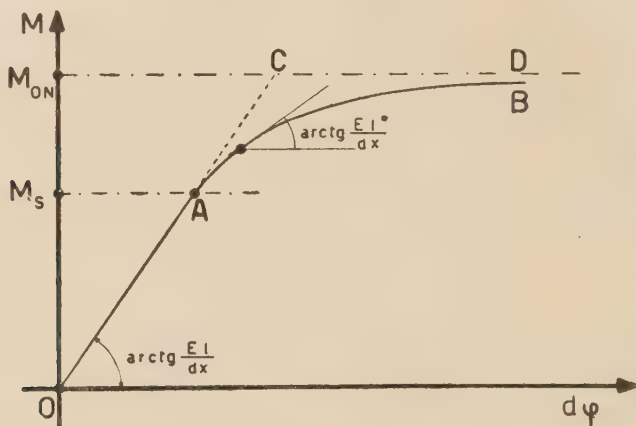



Fig. 2.

effettivo OAB con la spezzata ideale OCD si introduce il concetto, indubbiamente un pò astratto, di cerniera plastica: sotto il momento costante M_{ON}, una rotazione relativa di qualsiasi ampiezza è permessa tra le facce del tronco dx. Si osservi che tale rotazione può verificarsi però solo nel senso cui corrispondono su tutti i punti della sezione delle ε dello stesso segno di quelle preesistenti, perchè se ε cambia segno (fig. 3) la σ del diagramma ideale tensioni deformazioni decresce elasticamente. La rotazione cioè può verificarsi solo intorno al punto C (fig. 1 f), e nel senso delle due coppie M applicate al tronco: può quindi dirsi che il tronco lungo dx funziona come cerniera unilateralmente [1]). Il concetto di cerniera plastica è quindi del tutto analogo a quello posto a base del calcolo a rottura sviluppato in presenza di solo momento flettente; l'ubicazione di tale cerniera non coicide però col baricentro, ed è funzione di N; così pure il momento limite M_{ON} dipende non solo dalle caratteristiche fisico-geometriche del tronco, ma anche da N.

---

[1]) Si osservi pure che, per $N = N_0$ ($\sigma = \sigma_0$ su tutta la sezione) è consentita non solo una traslazione rigida delle due facce nel senso di N, ma anche una rotazione relativa, purchè la rotazione complessiva avvenga intorno ad un punto non interno alla sezione, e sia tale da provocare delle ε dello stesso segno di quelle preesistenti.

Riportando in diagramma, per una determinata sezione, i valori di N e di N_{ON}, si ottengono dei dominî chiusi, che possiame chiamare dominî di snervamento, entro i quali deve essere compreso il punto P (MN) perchè non siano violate le condizioni di plasticizzazione; in condizioni di

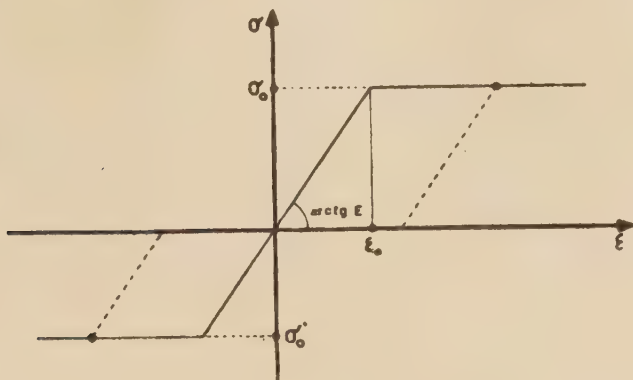



Fig. 3.

completa plasticizzazione, e cioè in presenza di una cerniera plastica, il punto P si trova sul contorno del dominio.

Per una sezione rettangolare $b \cdot h$, con $\sigma_0 = \sigma'_0$, la curva $M_{ON} - N$ è rappresentata dalla relazione [1]

$$M_{ON} = \pm M_0 \left(1 - \frac{N^2}{N_0^2}\right) \tag{2}$$

e il dominio di snervamento si presenta come nella fig. 4, costituito da due rami di parabola; il massimo di M_{ON} si ha per N = O.

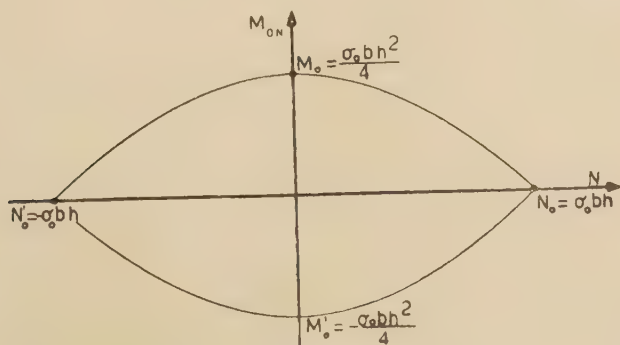



Fig. 4.

Nel caso del conglomerato armato invece [3] il dominio di snervamento ha l' aspetto della fig. 5, e il massimo di M_{ON} si ottiene per un valore N (di compressione) diveso da zero. In genere è però caratteristica comune a tutti i dominî di snervamento la convessità, nel senso che ogni

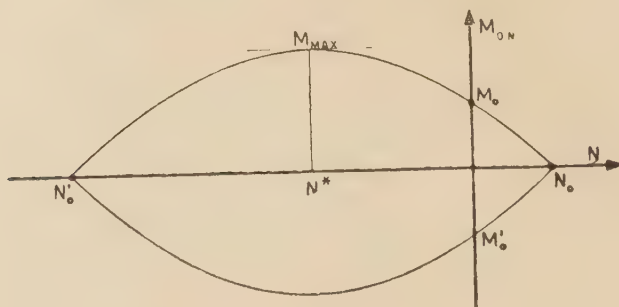



Fig. 5.

retta non può avere più di due punti in comune col contorno; è su questa caratteristica che poggia la dimostrazione dei teoremi di GREENBERG e di FEINBERG generalizzati.

3. — *Il teorema di Greenberg generalizzato.*

Si consideri una struttura monoassiale iperstatica, soggetta alle forze esterne F_i; un insieme di caratteristiche interne, generato sulla struttura isostatica dalle forze F_i e da un qualsiasi insieme delle reazioni iperstatiche, si dice in equilibrio o *compatibile* con le forze F_i.

Un numero ψ si definisca *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle forze F_i se esiste un qualsiasi insieme di caratteristiche, compatibile con le forze $\psi\, F_i$, e che rispetti in ogni sezione le condizioni di plasticizzazione, cioè tale che, per ogni sezione, il punto NM non sia ubicato fuori del corrispondente dominio di snervamento.

Si vuole dimostrare che: *se ψ è un moltiplicatore staticamente ammissibile, non può aversi la rottura sotto le forze $\psi^*\, F_i$, essendo $\psi^* < \psi$.*

Per definizione di moltiplicatore staticamente ammissibile, esiste un insieme di caratteristiche S compatibile con le forze $\psi\, F_i$, e tale che in ogni sezione il punto MN sia interno o sul contorno del corrispondente dominio di snervamento. Esiste perciò un insieme S^* di caratteristiche compatibile con le forze $\psi^*\, F_i$, e tale che per ogni sezione il punto MN sia interno al dominio di snervamento. L' insieme S^* è, ad esempio, quello che si ottiene moltiplicando S per $\dfrac{\psi^*}{\psi}$; S^* è generato nella struttora iso-

statica dalle forze $\frac{\psi^*}{\psi} F_i \psi = \psi F_i$, e dalle iperstatiche $X_i \frac{\psi^*}{\psi}$, essendo X_i le iperstatiche che, assieme alle $\psi \; F_i$ danno luogo all' insieme S; quindi S^* è compatibile con le forze $\psi^* F_i$. Inoltre, per la convessità del dominio di snervamento, se in corrispondenza della sezione generica è P il punto MN del sistema S, il punto P^* ($M^* N^*$) di S^*, essendo (fig. 6) $O P^* = \frac{\psi^*}{\psi} OP < OP$, giace nell' interno del dominio stesso. Se la rottura avviene sotto le forze $\psi^* \; F_i$, vuol dire che si sono create cerniere plastiche in numero n sufficiente a permettere la deformabilità cinematica dell' intera struttura, o di una parte di essa.

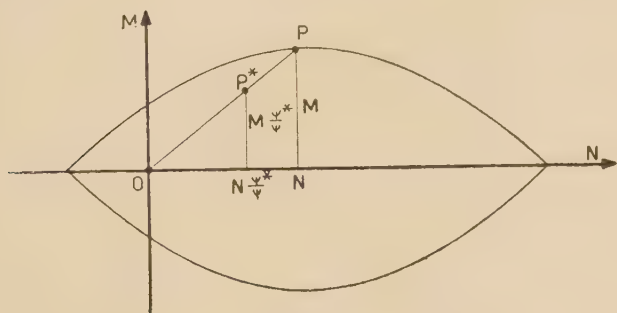



Fig. 6.

Considerando il primo movimento di collasso, si è in presenza di spostamenti così piccoli da non alterare sensibilmente la configurazione della struttura; questo insieme di movimenti rigidi è congruente nel senso noto. D' altro canto l' insieme delle forze $\psi^* F_i$ e delle caratteristiche limiti S_i^{**} agenti sugli estremi dei singoli tronchi rigidi della struttura è un sistema di forze in equilibrio; in omaggio al principio dei lavori virtuali le forze $\psi^* F_i$ ed S_i^{**} compiono, per effetto dei suddetti spostamenti, lavoro nullo; e cioè si può scrivere

$$L_F + L_S^{**} = O \tag{3}$$

Il lavoro L_S^{**} è fornito dall' espressione

$$L_S^{**} = \sum_{1}^{n} {}_i \; M_{ONi} \; \vartheta_i + \sum_{1}^{n} {}_i \; N_i \, h_i \, \vartheta_i = \sum_{1}^{n} {}_i \; (M_{ONi} + N_i \, h_i) \, \vartheta_i \tag{4}$$

essendo (fig. 7) M_{ONi} ed N_i le caratteristiche S_i^{**} in corrispondenza della i—esima tra le n sezioni ove si sono localizzate le cerniere plastiche, ϑ_i l' angolo di rotazione relativa in corrispondenza della stessa sezione, e h_i

la distanza tra il centro C di rotazione (cerniera plastica) ed il baricentro G della sezione.

Il generico termine

$$\left(M_{ONi} + N_i\, h_i\right) \vartheta_i$$

della sommatoria (4) è negativo; infatti (fig. 8), per effetto degli spostamenti dovuti a ϑ_i le σ agenti sui tronchi rigidi in corrispondenza delle due facce della sezione i—esima compiono tutte lavoro negativo (si

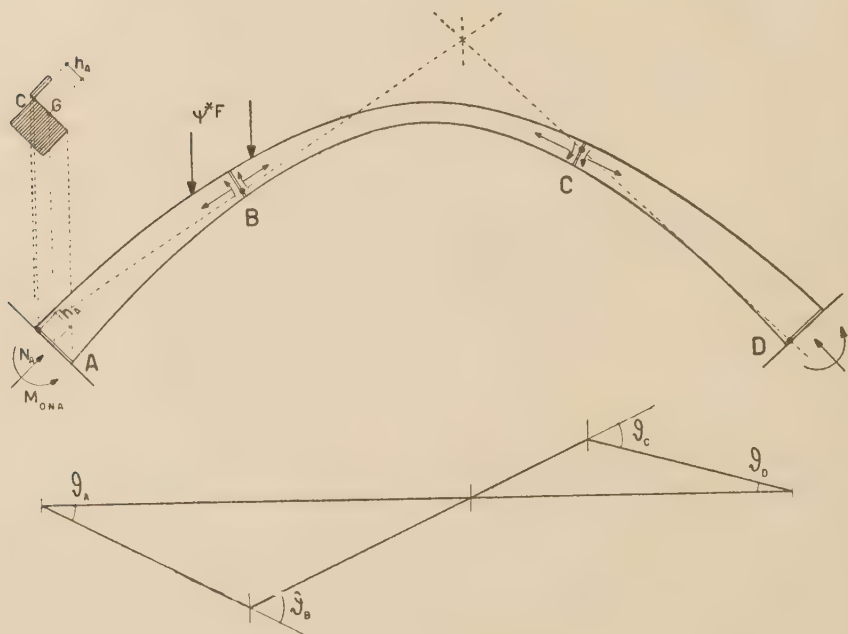



Fig. 7.

ricordi che la cerniera plastica permette le rotazioni solo in tal senso), e d' altronde il lavore L_{Mi} è compiuto proprio dalle tensioni interne σ:

$$L_{Mi} = \left(M_{ONi} + N_i\, h_i\right) \vartheta_i = \vartheta_i \int_A \sigma\, y\, d\, A. \tag{5}$$

Se forze ψ^* F, sono compatibili con il sistema S^* di caratteristiche interne e quindi sono in equilibrio con le S_i^* trasmettentisi attraverso le n sezioni ove si sono supposte localizzate le cerniere plastiche; il prin-

cipio dei lavori virtuali permette di scrivere perciò, per la stessa deformata della fig. 7:

$$L_F + L_S{}^* = O \,. \tag{6}$$

Dal confronto tra la (3) e la (6) si ha:

$$L_S{}^{**} - L_S = O$$

e cioè

$$\sum_{1}^{n}{}_{i} \left[\left(M_{ONi} + N_i\, h_i\right) \vartheta_i - \left(M_i^* + N_i^*\, h_i\right) \vartheta_i \right] = O \,. \tag{7}$$

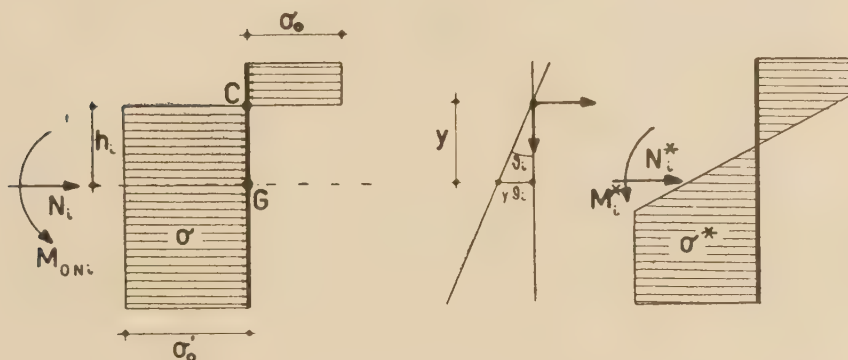



Fig. 8.

Il generico termine della (6) è negativo. Infatti, se σ^* (fig. 8) è il diagramma delle tensioni corrispondenti ad N_i^* ed M_i^*, è

$$M_i^* + N_i^*\, h_i\,)\, \vartheta_i = \vartheta_i \int_A \sigma^*\, y\; d\, A.$$

Nella zona ove le σ sono positive (trazione) è $\vartheta_i\, y$ negativo; essendo

$$\sigma^* \leqq \sigma$$

è pure

$$\vartheta_i \int_{A^+} \sigma\, y\; d\, A \leqq \vartheta_i \int_{A^+} \sigma^*\, y\, d\, A. \tag{8}$$

Nella zona dove le σ sono negative (compressione) è $\vartheta_i\, y$ positivo; essendo

$$\sigma^* \geqq \sigma$$

è pure

$$\vartheta_i \int_A \sigma \, y \, d\, A \leqq \vartheta_i \int_{A} \sigma^* \, y \, d\, A. \tag{9}$$

Le due relazioni (8) e (9) non possono avere ambedue il segno di eguaglianza, poichè, definendo M_i^* ed N_i^* un punto interno al dominio di snervamento, la sezione non può essere interamente plasticizzata. E' perciò in complesso

$$\vartheta_i \int_A \sigma \, y \, d\, A < \vartheta_i \int_A \sigma^* \, y \, d\, A$$

$$(M_{ONi} + N_i \, h_i) \, \vartheta_i < (M_i^* + N_i^* \, h_i) \, \vartheta_i$$

e poichè il primo termine di questa disuguaglianza è negativo, è pure

$$\Big[(M_{ONi} + N_i \, h_i) \, \vartheta_i - (M_i^* + N_i^* \, h_i) \, \vartheta_i \Big] < 0.$$

La (7) quindi è un assurdo, non potendo essere zero la somma di termini tutti negativi; la struttura non può cioè rompersi sotto le forze $\psi^* F_i$, essendo $\psi^* < \psi$. Si enuncia così il teorema di GREENBERG generalizzato: "*il coefficiente di sicurezza* s *è il più grande fra tutti i moltiplicatori* ψ *staticamente ammissibili:*

$$\psi \leqq s \tag{10}$$

4. — *Il teorema di Feinberg generalizzato.*

Un numero γ si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* se esiste l' equilibrio tra le forze $\gamma \, F_i$ e le caratteristiche M_{ONi} ed N_i in n cerniere plastiche, essendo n il numero di cerniere sufficienti a consentire la deformazione rigida del sistema, o di una sua parte.

La ricerca di un coefficiente γ si può eseguire come segue. Si fissano le n sezioni in cui si pensano localizzate le cerniere plastiche; se fossero note le posizioni delle cerniere sulla altezza della sezione, e cioè gli effettivi valori di M_{ONi} ed N_i, sarebbe sufficiente disegnare la deformata rigida consentita dai vincoli e scrivere l' espressione dei lavori virtuali

$$\gamma \, L_F + L_M + L_N = 0$$

per ottenere il valore di γ. Ancora più semplicemente, si potrebbe imprimere una deformata tale per cui le rotazioni relative avvengano intorno al baricentro delle sezioni ove sono localizzate le cerniere plastiche. Tale deformata è congruente, perchè rispetta le condizioni di rigidità dei sin-

goli tronchi; anche in relazione ad essa si può quindi scrivere l'equazione dei lavori virtuali, nella quale però scompare il termine L_N:

$$\gamma\, L'_F + L'_M = 0 \tag{11}$$

Poichè non si conoscono gli effettivi valori di N_i e di M_{ONi}, ma solo la relazione che li lega (essi debbono definire un punto giacente sul contorno del dominio di snervamento), è necessario procedere per successive approssimazioni. Si fissano cioè i valori $N_i^{(1)}$ di N_i nelle n sezioni, si ricavano i corrispondenti valori $M_{ONi}^{(1)}$ di M_{ONi}, e si trae un primo valore $\gamma^{(1)}$ dalla (11); poi, attraverso le equazioni della statica, si determinano gli sforzi normali $N_i^{(2)}$ provocati dalle coppie $M_{ONi}^{(2)}$ e dalle forze $\gamma^{(1)} F_i$, e quindi i nuovi valori $M_{ONi}^{(2)}$ e dalla (11) un nuovo valore $\gamma^{(2)}$ di γ. Il procedimento è in genere fortemente convergente.

Il teorema di FEINBERG generalizzato permette di asserire che *il coefficiente di sicurezza s non può essere maggiore di un coefficiente γ cinematicamente sufficiente.* Si considera la cosiddetta struttura « rinforzata », in cui tutti i tronchi rigidi, risultanti dalla struttura effettiva per l'interposizione delle cerniere plastiche che hanno permesso di giungere al valore di γ, siano dotati di resistenza infinita (dominio di snervamento coincidente con il piano); in corrispondenza delle cerniere, invece, la relazione limite tra M e N sia la stessa di quella della struttura effettiva. Per la struttura rinforzata è

$$s_r = \gamma$$

Ma il coefficiente s è il più alto dei moltiplicatori ψ della struttura effettiva, ed è quindi anche un moltiplicatore staticamente ammissibile della struttura rinforzata:

$$s = \psi_r$$

Poichè è

$$\psi \leqq s$$

è pure

$$s \leqq \gamma. \tag{12}$$

La (12) è l'espressione del teorema di FEINBERG generalizzato.

5. — *La determinazione di un intervallo di definizione di s.*

Determinato γ come è stato mostrato nel numero precedente, si può da esso ottenere agevolmente ψ.

Tracciati i diagrammi degli S_γ (M_γ ed N_γ) provocati da carichi γF_i e dalle caratteristiche limiti su tutta la struttura, si determina per ogni sezione il punto P_γ di coordinate M_γ ed N_γ, ed ove P_γ è fuori del dominio di snervamento si trae il rapporto (fig. 9) OP_γ / OP' tra il segmento OP_γ e la parte di questo compreso nel dominio di snervamento. Sia ρ il massimo tra i rapporti OP_γ / OP' così calcolati; si può dire che $\frac{\gamma}{\rho}$ è in ogni caso un moltiplicatore staticamente ammissibile ψ. Infatti si consideri l'assieme di caratteristiche interne S_γ / ρ; esso è compatibile con le forze $\frac{\gamma}{\rho} F_i$ inoltre (fig. 9), in ogni sezione il punto P_ρ corrispondente alle caratteristiche N_γ / ρ ed M_γ / ρ è interno o sul contorno del dominio di snervamento,

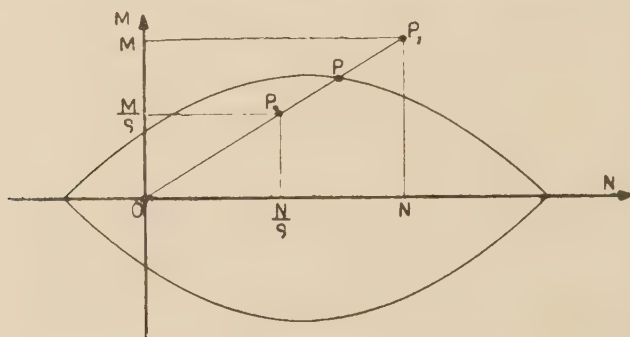



Fig. 9.

poichè questo è convesso, e ρ è il più grande dei rapporti OP_γ / OP'. Può quindi scriversi

$$\frac{\gamma}{\rho} \leq s \leq \gamma . \tag{13}$$

Nel secondo tentativo l' intervallo (13) in genere si restringe se si prevede la formazione di cerniere plastiche nelle sezioni dove, nel primo tentativo, risultava più elevato il rapporto OP_γ / OP'.

6. — *Il caso del carico non proporzionale.*

Il coefficiente di sicurezza s di cui si è trattato è relativo a tutti i carichi agenti. Può darsi però che alcuni gruppi di carichi possano crescere mantenendo inalterati i mutui rapporti, mentre altri rimangono costanti; esempio tipico il peso proprio g ed il carico accidentale a di una struttura da ponte. Interessa allora determinare il coefficiente di sicurezza s_a relativo all' aumento dei soli carichi accidentali, e cioè il valore dei ca-

richi $g + s_a \cdot a$ che possono provocare la rottura. Un numero ψ_a si definisce in questo caso *moltiplicatore statisticamente ammissibile* delle forze a se esiste un qualsiasi insieme di caratteristiche, compatibile con le forze $g + \psi_a a$, e che rispetti in ogni sezione le condizioni di plasticizzazione; e così pure un numero γ_a è un *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* se esiste l' equilibrio tra le forze $g + \gamma_a a$ e le caratteristiche M_{oni} ed N_i in n cerniere plastiche, essendo n il numero di cerniere sufficiente a consentire la deformabilità cinematica di tutto il sistema, o di una parte di esso. Il teorema di Greenberg si enuncia: se ψ_a è un moltiplicatore staticamente ammissibile, non può aversi la rottura sotto le forze $g + \psi^*_a a$ essendo $\psi^*_a < \psi_a$. Esiste anche in questo caso un insieme di caratteristiche S^* compatibile con le forze $g + \psi_a^* a$ e tale che per ogni sezione il punto P^* (M^* N^*) sia interno al dominio di snervamento; questo insieme si ottiene scindendo l' insieme S, in equilibrio con le forze $g + \psi_a a$ e, rispettante le condizioni di plasticizzazione, in due insiemi, S_g ed S_a, ciascuno in equilibrio rispettivamente con g e con $\psi_a a$, riducendo S_a nel rapporto $\frac{\psi_a^*}{\psi_a}$, e costruendo il nuovo insieme

$$S^* = S_g + \frac{\psi_a^*}{\psi_a} S_a .$$

L' insieme S^* è generato sulla struttura isostatica dalle forze $g + \psi^* a$ e dalle iperstatiche $X_{ig} + \frac{\psi_a^*}{\psi_a} X_{ia}$, essendo X_{ig} le iperstatiche che assieme a g generano l' insieme S_g, e X_{ia} le iperstatiche che, assieme alle forze $\psi_a a$, generano l' insieme S_a. L' insieme S_g possa essere scelto in modo che in ogni sezione il punto P_g (M_g N_g) risulti interno al dominio di snervamento (basterebbe, a ciò fare, assumere l' insieme S_g in fase elastica, se, come quasi sempre accade, per il solo peso proprio g non si generano deformazioni permanenti); risulta allora (fig. 10) che, per la convessità del dominio di snervamento, il punto P^* ($M_g + \frac{\psi_a^*}{\psi_a} M_a$, $N_g + \frac{\psi_a^*}{\psi_a} N_a$) deve risultare anche esso interno a detto dominio. La dimostrazione del teorema di Greenberg generalizzato prosegue così identica a quella già svolta, avvertendo che il lavoro L_F della (3) e della (6) è quello fornito dalle forze $g + \psi^* a$ per la deformata di incipiente collasso. Può quindi porsi

$$\psi_a \leqq s_a .$$

La dimostrazione del teorema di Feinberg è identica a quella esposta al n° 4; può quindi scriversi anche

$$s_a \leqq \gamma_a .$$

Un moltiplicatore γ_{u} si ottiene per tentativi, come già esposto al n° 4. Per ottenere da γ_{u} un ψ_{u} si tracciano i diagrammi degli $M_{g} + M_{\gamma}$ ed

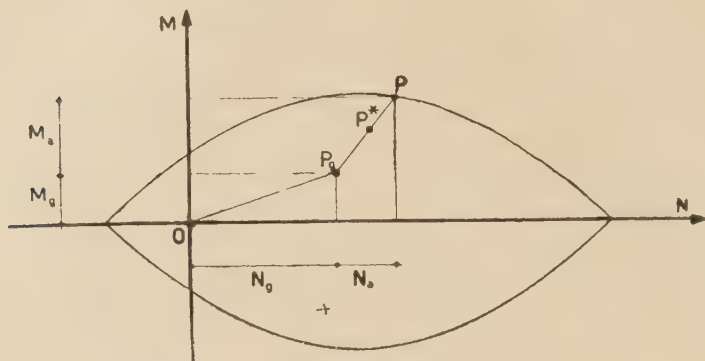



Fig. 10.

$N_{g} + N_{\gamma}$ provocati dalle forze $g + \gamma_{u}\, a$ e dalle caratteristiche limiti; si determina in ogni sezione il punto P_{γ} di ascisse $(N_{u} + N_{\gamma})$ $(M_{u} + M_{\gamma})$, ed ove P_{γ} è fuori del dominio si trae (fig. 11) il rapporto $P_{u} P_{\gamma} / P_{u} P'$ tra il segmento $P_{u} P_{\gamma}$ e la parte di questo compresa nel dominio di snervamento.

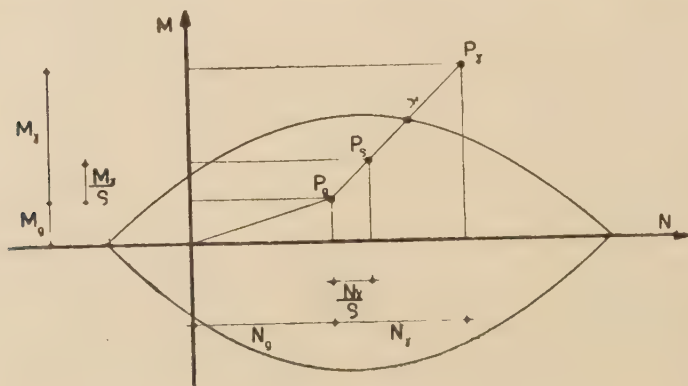



Fig. 11.

Sia ρ il massimo dei rapporti $P_{g}\, P_{\gamma} / P_{g}\, P'$ così calcolati; si può dire che $\frac{\gamma_{u}}{\rho}$ è un moltiplicatore ψ_{u} staticamente ammissibile. Infatti l'insieme di caratteristiche interne $S_{u} + S_{\gamma} / \rho$ è compatibile con le forze $g + \frac{\gamma_{u}}{\rho}\, a$ inoltre (fig. 11) in ogni sezione il punto P_{ρ} corrispondente alle caratteristiche $N_{g} + N_{\gamma} / \rho$ ed $M_{g} + M_{\gamma} / \rho$ è interno o sul contorno del dominio di sner-

vamento, perchè questo è convesso, e ρ è il più elevato dei rapporti $P_y P_\gamma / P_y P'$.

Si può quindi scrivere

$$(14) \qquad \frac{\gamma_a}{\rho} \leq s_a \leq \gamma_a \,.$$

L' intervallo (14) si restringe, in genere, se nel secondo tentativo si prevede la localizzazione delle cerniere plastiche in corrispondenza di quelle sezioni ove, nel primo tentativo, risultava più elevato il rapporto $P_y P_\gamma / P\ P$.

7. — *Alcune considerazioni.*

Le precedenti dimostrazioni restano valide anche nel caso in cui si voglia chiamare in gioco, oltre allo sforzo normale ed al momento flettende, il taglio; in questo caso il dominio di snervamento risulta essere un poliedro dello spazio MNT, contenente l' origine, e perchè le dimostrazioni precedenti non perdano di vigore è sufficiente che tale poliedro risulti convesso, nel senso che una retta non possa avere con esso in comune che due punti. Per tener conto, nel caso di una struttura spaziale, delle sei caratteristiche agenti sulla sezione generica della trave (momento flettente M_x e M_y, sforzi di taglio T_x e T_y, sforzo normale N e momento torcente M_z) occorre ripetere la dimostrazione nell' S_6 delle sei caratteristiche, ove il dominio di snervamento è un iperpoliedro; anche in questo caso è determinante la convessità di tale dominio, intesa in senso euclideo.

Napoli, Istituto di Costruzion di Ponti, giugno 1955.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. Franciosi - *Sul calcolo a rottura delle strutture monodimensionali in regime elastico-plastico.* Giornale del Genio Civile. Roma, agosto 1952.

[2] V. Franciosi — *Il procedimento del " limit design ,, per carico non proporzionale.* La Ricerca. Napoli, marzo 1954.

[3] V. Franciosi — *Sul calcolo a rottura delle strutture in conglomerato armaio.* L' industria italiana del cemento. Roma, aprile 1954.

L' instabilità dell' equilibrio della trave Nielsen al di là del limite di proporzionalità

Nota del dott. ing. **Eugenio Bruzzese**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 4 giugno 1955)

Sunto. — Si dimostra che il moltiplicatore critico dei carichi agenti su di una trave Nielsen, calcolato tenendo conto dell'effettivo legame tra modulo di elasticità e sollecitazione unitaria, non garantisce le elevate riserve nei confronti della instabilità che si deducono determinando il moltiplicatore stesso in regime elastico.

1. — *Premessa.*

È noto come, tra i vantaggi che si assegnano alla trave Nielsen, si includa, di solito, quello di un' ampia sicurezza nei riguardi della instabilità. Il calcolo in campo elastico del moltiplicatore critico dei carichi agenti su una trave Nielsen fornisce infatti valori di gran lunga superiori a quelli di una analoga struttura ad arco, a sospensione verticale; questo risultato, ovviamente connesso con la minore deformabilità del sistema triangolato cui in definitiva si riduce il tipo di arco che si considera, può condurre ad una eccessiva fiducia nelle doti di stabilità dell' arco alla Nielsen.

Il valore elevatissimo del carico critico, ottenuto conducendo il calcolo in campo elastico, e la conseguente entità delle sollecitazioni unitarie, rendono necessario estendere lo studio del problema al di là del limite di proporzionalità.

Questo vale in modo particolare per la struttura in esame, dove gli sforzi orizzontali, indotti nell' impalcato dalle sospensioni oblique, determinano, con la nota riduzione dei momenti nell' arco, una notevole snellezza di quest' ultimo, caratteristica della trave Nielsen.

I risultati ottenuti per questa via mostrano come la trave Nielsen non offra garanzie maggiori di quelle relative ad altri sistemi soggetti all' insidia della instabilità.

2. — *Il criterio di convergenza per la determinazione dei moltiplicatori critici.*

Il metodo seguito per la determinazione del moltiplicatore critico della trave tipo Nielsen, considerata come travatura reticolare a nodi in-

castro, è basato [4], [8], sulla proprietà del metodo di CROSS (modificato per la presenza di forze assiali) di convergere, se applicato a strutture in equilibrio stabile, di divergere se invece la struttura è instabile [1]).

Il criterio euleriano, nella sua seconda forma, consente di fissare le soglie dell'instabilità allo stadio cui corrispondono deformazioni infinite per azione di carichi trasversali agenti in concomitanza con gli sforzi assiali; si riconosce perciò che una coppia M', applicata in un nodo A della travatura, produce una rotazione infinita se l'equilibrio della struttura è indifferente. Pertanto occorre determinare per tentativi quel sistema di carichi esterni in presenza dei quali la rotazione indotta dalla coppia M assume un valore infinitamente grande.

Sia, in ogni caso, rispettata la condizione

$$\sum_n \rho_{in} > 0 \qquad (1)$$

essendo ρ_{in} la rigidità dell' elemento n – esimo, confluente nel generico nodo i — esimo: è così garantita la stabilità dell' equilibrio delle singole strutture elementari secondo CROSS [2]); in caso contrario infatti sarebbe instabile anche la struttura effettiva.

Applicata la coppia M' in un nodo A, essendo gli altri nodi bloccati, la rotazione $\alpha' = k\,M'$ che il nodo compie è di grandezza finita, per l' ipotesi (1). A rotazione avvenuta, si vincola il nodo A, si diffondono per la struttura i momenti fino ad annullare i residui e si calcola la somma M″ dei momenti trasmessi al nodo A, rimasto bloccato in questo primo equilibramento.

Le condizioni

$$M'' < M' \quad ; \quad M'' = M' \qquad (2)$$

corrispondono, rispettivamente, all' equilibrio stabile od indifferente: infatti se, a partire dal momento M″, si ripete il procedimento anzidetto, si ha una ulteriore rotazione $\alpha'' = k\,M''$ e quindi, tramite una nuova diffusione di momenti nella struttura, un M‴ ed un α''': e cioè si perviene ad

---

[1]) La dimostrazione di questa proprietà, riportata nel testo del GALLI [2], deriva dall' essere l' energia potenziale totale, in condizioni di equilibrio, massima o minima, in relazione alla qualità dell' equilibrio. Lo sbloccaggio di un nodo determina così (a partire dalla configurazione non equilibrata corrispondente al nodo bloccato) una diminuzione di energia totale nella struttura stabile, un aumento in quella instabile; pertanto avvicinamento alla configurazione di equilibrio stabile nel primo caso, allontanamento nel secondo.

[2]) Si intende come tale, quella costituita dalle aste concorrenti nel nodo generico, con gli estremi, a questo opposti, incastrati rigidamente.

una serie α', α'', α'''...., la cui somma fornisce il valore effettivo della rotazione del nodo A. In condizioni di equilibrio indifferente la serie α diverge e, con essa, quella dei momenti M; quest' ultima è geometrica, essendo:

$$\frac{M^{(n)}}{M^{(n-1)}} = \frac{M''}{M'} = r \qquad (3)$$

e la sua somma vale:

$$\sum M = \frac{M'}{1-r}$$

Quindi la struttura è in equilibrio stabile o indifferente secondo che sia:

$$r < 1 \quad ; \quad r = 1 \qquad (4)$$

condizioni che, tramite le (3), riproducono le (2).

Indicato con q il carico a ml. generico, disteso sull' impalcato, il procedimento esposto va ripetuto per valori diversi q', q'',..... di q e consente così di determinare, per tentativi, un intervallo sufficientemente piccolo nel quale è compreso il carico critico $q_{crit.}$ [1]). Il valore del moltiplicatore critico :

$$\lambda_{crit.} = \frac{q_{crit.}}{g+a} \qquad (5)$$

essendo g il carico fisso, a il carico mobile di esercizio.

---

[1]) Il metodo, se è applicato alle travature reticolari, ha il vantaggio di poter partire dal valore di $q_{crit.}$ che compete alla struttura a nodi cerniera, determinabile con considerazioni relative alla instabilità delle singole aste compresse. E', per contro, caratterizzato dallo svantaggio di non godere della proprietà di stringere il risultato per classi contigue, sicchè la scelta dei $q^{(i)}$ è affidata, in ogni fase del procedimento, al criterio di chi opera. Inoltre il procedimento consente di determinare soltanto l' intervallo, anche se molto piccolo, in cui è compreso il carico critico, perchè, in prossimità dello stato di equilibrio indifferente, il metodo di Cross converge o diverge molto lentamente, sicchè praticamente è impossibile verificare che sia soddisfatta la seconda delle (4). E' invece possibile riconoscere la convergenza o la divergenza del metodo di Cross, anche se ciò avviene lentamente, e quindi fissare due valori del carico q, ad uno dei quali corrisponde una configurazione stabile, all' altro una configurazione instabile, entrambe molto vicine alla condizione di equilibrio indifferente. Questi valori di q limitano l' intervallo innanzi detto.

Per eseguire gli equilibramenti alla CROSS [1] occorre assumere, per ogni asta, valori della rigidità (intendendo come tale il rapporto $\frac{M}{\varphi_B}$ all'estremo B di una trave AB incastrata in A, appoggiata in B e quì soggetta ad una coppia M) e del coefficiente di trasmissione, modificati per la presenza dello sforzo assiale.

Note [1]) le espressioni:

$$\varphi(u) = \frac{3}{u}\left(\frac{1}{sen\,2u} - \frac{1}{2u}\right) \quad ; \quad \psi(u) = \frac{3}{2u}\left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{tg\,2u}\right)$$

$$\Phi(u) = \frac{3}{u}\left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{senh\,2u}\right) \quad ; \quad \Psi(u) = \frac{3}{2u}\left(\frac{1}{tgh\,2u} - \frac{1}{2u}\right) \tag{6}$$

dove:

$$2\,u = l\sqrt{\frac{P}{EI}} \tag{7}$$

con l lunghezza dell' asta generica e P carico assiale ad esso relativo, le rigidità ρ ed i coefficienti di trasmissione c_t risultano modificati come segue:

per aste compresse:

$$\rho = \frac{4\,E\,I}{l} \cdot \frac{3\,\psi}{4\psi^2 - \varphi^2} \quad ; \qquad c_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi}{\psi} \tag{8}$$

per aste tese:

$$\rho' = \frac{4\,E\,I}{l} \cdot \frac{3\,\Psi}{4\Psi^2 - \Phi^2} \quad ; \qquad c'_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi}{\Psi} \tag{9}$$

3. — *L' estensione del criterio di convergenza al campo di elasticità non lineare.*

Il calcolo del moltiplicatore critico della trave NIELSEN, oltre il limite di proporzionalità, perseguito col metodo esposto nel paragrafo precedente, richiede alcune premesse che si espongono quì di seguito.

Per l' acciaio si ammette come diagramma (σ, ε) una bilatera con andamento parallelo all' asse delle ε, al di là del limite di proporzionalità (fig. 1). Per il calcestruzzo si assume come legge di interdipendenza tra le σ e le ε quella espressa dalla relazione parabolica:

—

[1]) Le funzioni φ (u) e ψ (u) sono state tabellate dal TIMOSHENKO [3]; un grafico delle funzioni Φ (u) e Ψ (u) è riportato nella nota [10].

$$\sigma = \frac{\sigma_R}{\varepsilon^2_R} (2 \varepsilon_R \varepsilon - \varepsilon^2) \qquad (10)$$

dove σ_R, ε_R indicano (fig. 2) la sollecitazione unitaria e la dilatazione, relative allo stato limite di rottura; si abbandona perciò il concetto di modulo di elasticità longitudinale costante, per fare posto a quello di modulo tangente (fig. 3)

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{2\sigma_R}{\varepsilon^2_R} (\varepsilon_R - \varepsilon) = E_0 (1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_R}) \qquad (11)$$

dove E_0 è il modulo di elasticità in un intorno molto piccolo dell' origine della curva (σ, ε).

Con riferimento alle aste compresse al di là del limite di proporzio-

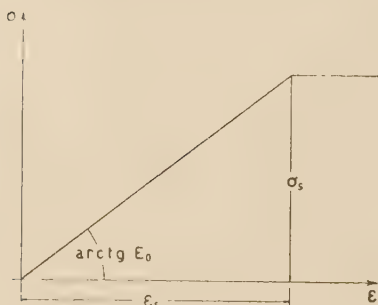



Fig. 1

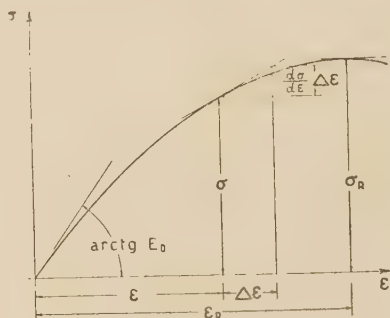



Fig. 2

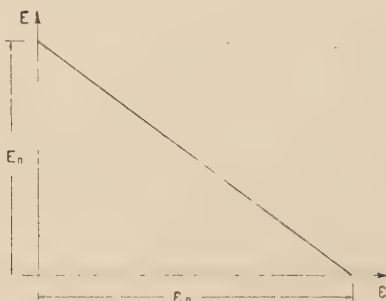



Fig. 3

nalità, si considera il carico critico P_{t}^{n}, ottenuto sostituendo nella formula di EULERO ad E = cost. il valore E_t del modulo tangente, come il massimo carico assiale sotto il quale un'asta rimane ancora rettilinea; si suppone inoltre che, oltre questo limite, l' inflessione laterale dell'asta proceda simultaneamente al crescere del carico assiale [1]).

Nell' ipotesi di aste a sezione costante e prescindendo dal modesto contributo dei momenti secondari, si suppone costante la sollecitazione unitaria lungo ogni asta, considerando

[1]) Quanto sopra [9] corrisponde alla nota teoria di ENGESSER per la ricerca del carico assiale critico in campo elastoplastico in un'asta rettilinea di sezione costante, accettata ritenendo valida la teoria dello SHANLEY.

Diverse interpretazioni del fenomeno della instabilità per carico di punta in campo elastoplastico, hanno dato luogo a più teorie. La teoria di ENGESSER,

perciò il modulo tangente variabile da asta ad asta, ma costante per ciascuna di esse.

La validità del criterio di convergenza, nel campo dell' elasticità non lineare, resta giustificata dal seguente ragionamento: la configurazione secondaria che si studia è infinitamente vicina a quella principale di equilibrio, epperò, nel passare dalla prima alla seconda, si hanno variazioni piccolissime di σ rispetto a quella relativa alla configurazione di partenza. Perciò l' escursione $d\sigma$ (fig. 2), corrispondente al passaggio da una configurazione all' altra, si può accettare come avvenuta secondo la tangente al diagramma (σ, ε) nel punto corrispondente alla σ relativa alla condizione di equilibrio indifferente per ciascuna asta. Ne deriva la possibilità di applicare ancora i procedimenti validi in campo di elasticità lineare.

4. — *Calcolo del moltiplicatore critico.*

Si fa riferimento alla trave NIELSEN di 90 m. di luce della (fig. 4), ribassata a 1/7 circa, con impalcato largo 7 m. Ciascuna delle travi catena è costituita da 2 NP 500 a I ad anima rinforzata. Gli archi hanno sezione 60×140; le aste di parete sono realizzate con barre di diametro 60 mm.

Aree e momenti di inerzia hanno i seguenti valori:

catena	$A_c = 0.11$	m^2	$I_c = 0.00276$	m^3
arco	$A_a = 0.84$	„	$I_a = 0.02520$	„
sospensioni	$A_s = 0.28 \times 10^{-2}$		$I_s = 0.00636 \times 10^{-4}$	„

Con riferimento alle (10) e (11) ed al diagramma della fig. 2, si è ammesso, per il calcestruzzo compresso, $\sigma_R = -600$ Kgcm $^{-2}$, con $E_0 = 4 \times 10^5$ Kgcm $^{-2}$ ed $\varepsilon_R = 0{,}003$.

Per l' acciaio, supposto $\sigma_R = 7000$ Kgcm $^{-2}$, resta fissata $\sigma_s = 4660$ Kgcm $^{-2}$, al limite di proporzionalità, con $\varepsilon_R = 0.00212$ ed $E_0 = 2{,}1 \times 10^6$ Kgcm $^{-2}$.

---

abbandonata per quella di VON KARMAN che adotta il noto " modulo ridotto „ è stata di nuovo accettata in seguito alle ricerche dello SHANLEY; un recente studio, svolto dal RENZULLI presso l' Istituto di Scienza delle Costruzioni di Napoli, dimostra, contro la critica dello SHANLEY, la validità dell' analisi di VON KARMAN.

In tale stato di fatto, si è ritenuto opportuno accettare, nello svolgimento del presente studio, la teoria di ENGESSER che conduce a valori più bassi. quindi più prudenziali, del moltiplicatore critico; si noti inoltre che la teoria di VON KARMAN mal soccorre per postulare il comportamento elastico lineare nell' intorno della configurazione principale di equilibrio, cui nel seguito si ricorre.

Il carico fisso, assimilato ad un carico g uniformemente distribuito sull' impalcato, è pari a 4,1 t. m. $^{-1}$, il carico accidentale a previsto è di 2.5 t. m. $^{-1}$, entrambi riferiti ad un solo arco.

Nelle tabelle da 1 a 4 sono riportati i valori numerici delle grandezze che ricorrono nelle varie fasi del procedimento. Le lunghezze l delle aste sono espresse in m., gli sforzi assiali N_{g+q}, dovuti al peso proprio g

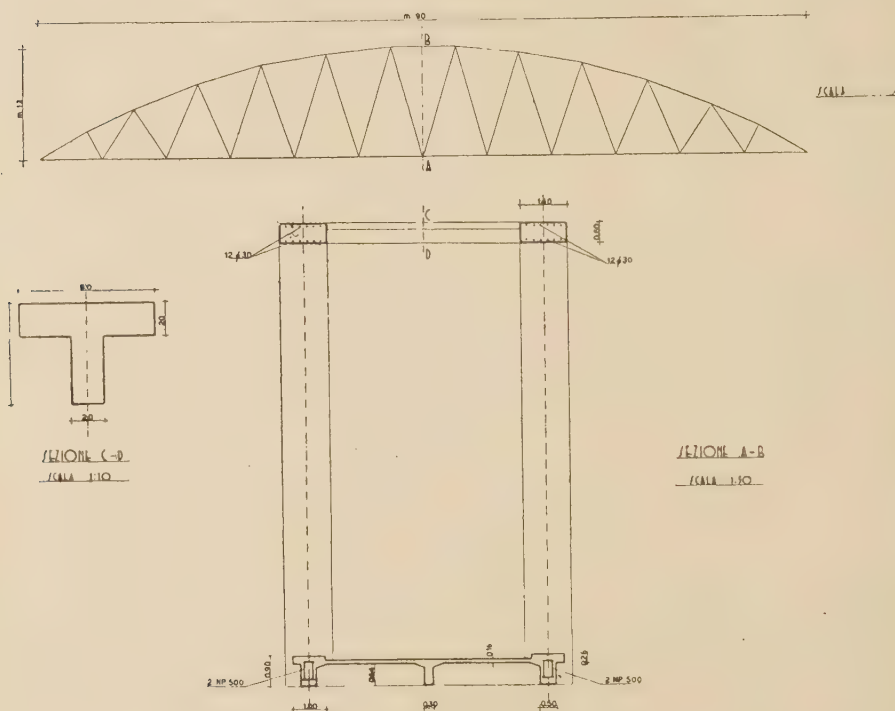



Fig. 4

ed ai carichi q a ml., relativi ai successivi tentativi, sono espressi in ton. e negativi se di compressione. I valori del modulo tangente E_t sono dati n t. m. $^{-2}$, e le costanti k in t. m.; queste ultime sono introdotte nei calcoli tramite i rapporti di ciascuna di esse al valore base k_0 dell'asta 7. I valori delle funzioni φ_i e ψ_i sono riportati solo per le aste compresse, poichè per le aste tese i diagrammi della nota [10], già citata, forniscono direttamente i valori dei rapporti delle [9] in cui compaiono le Φ_i e Ψ_i.

Nelle figure da 5 a 8 sono riportati gli equilibramenti alla Cross corrispondenti alle fasi successive del procedimento.

Si riportano i tentativi a partire da quello cui corrisponde la scelta di un carico q, distribuito sull' impalcato, di 53 t. m. $^{-1}$ ottenuto in seguito a precedenti approssimazioni che per brevità si omettono. Ciascuna

fase del procedimento può essere così descritta: determinati gli sforzi N_i nelle aste, dovuti al generico carico q di tentativo, e noti quelli dovuti ai carichi fissi, si determinano le sollecitazioni unitarie per ciascuna asta e, tramite le (10) e (11) i relativi moduli tangenti. Restano così fissati per

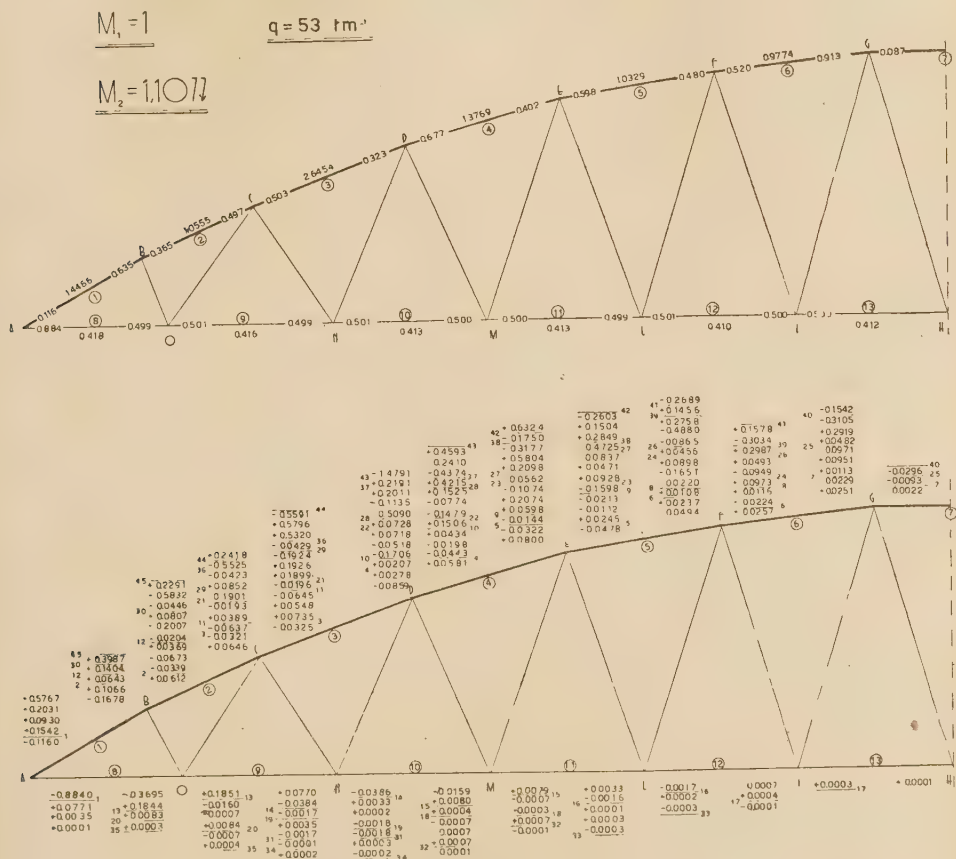



Fig. 5

ogni asta i valori $2u$ della (7) e quelli delle funzioni φ_i, ψ_i, Φ_i, Ψ_i. Questi, introdotti nelle (8) e (9), forniscono le rigidità ed i coefficienti di trasmissione [1]). Determinati i coefficienti di ripartizione in ciascun nodo, si applica una coppia M_1 unitaria, in un nodo qualsiasi della travatura [2]), ripartendola tra le aste confluenti nel nodo stesso; bloccato poi quest'ultimo,

[1]) La grande deformabilità delle aste di parete consente che, nel calcolo dei coefficienti di ripartizione, vengano trascurate le relative rigidità.

[2]) Nel caso in esame, attesa la simmetria nel sistema, si possono considerare applicate due coppie, ad es. nel nodo A e nel simmetrico. Si opera così

si diffondono i momenti nella struttura fino ad ottenere residui praticamente nulli. Indicando con M_2 la somma dei momenti rinviata al nodo bloccato, le disuguaglianze:

$$M_2 < M_1 \quad ; \quad M_2 = M_1 \quad ; \quad M_2 > M_1 \tag{12}$$

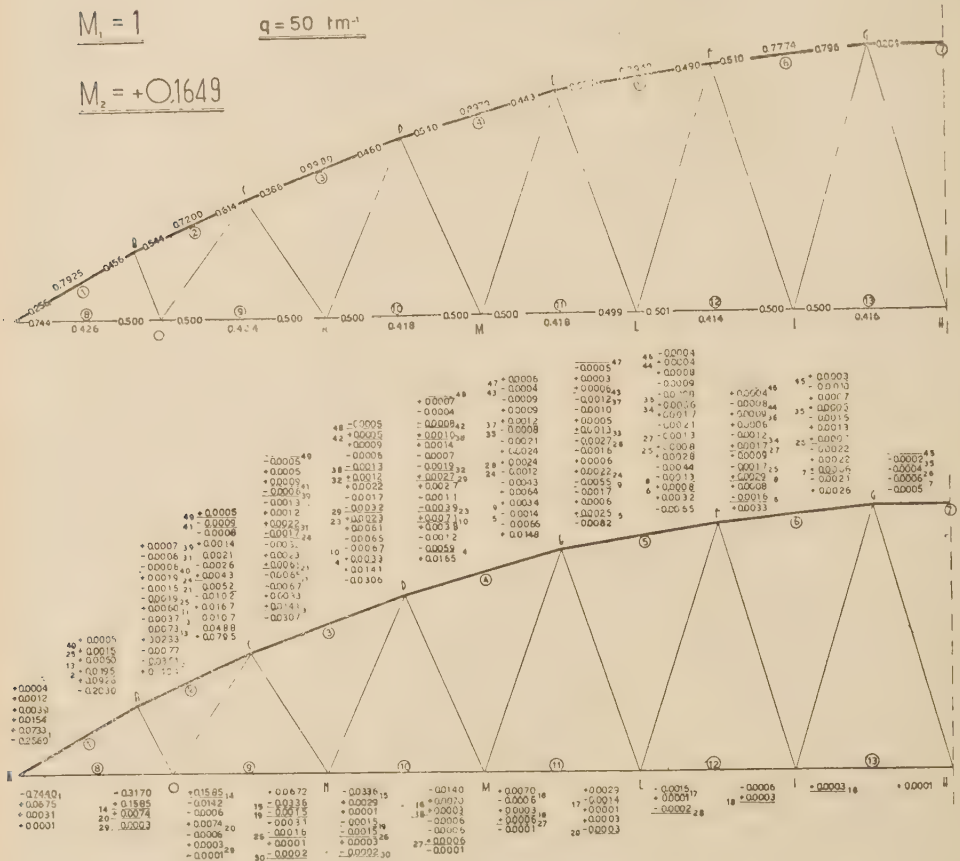



Fig. 6

su metà struttura, avendo conferito all' asta 7 la rigidità (nodi G e G' sbloccati contemporaneamente),

$$\rho_7 = \frac{3\,EI}{l} \cdot \frac{1}{\psi + \frac{\varphi}{2}}$$

Con riferimento alla scelta del nodo nel quale applicare la coppia, l'intuito suggerisce di dare la preferenza ad uno dei nodi nei quali confluiscono le aste più compresse (nel caso in esame il nodo A). L' esperienza dimostra che in tal modo il numero di equilibramenti si riduce al minimo.

sono caratteristiche del regime di equilibrio stabile, indifferente o instabile nella struttura.

Escluso il caso di uguaglianza, occorrerà procedere ad un ulteriore tentativo con un carico maggiore o minore e così di seguito. E' quanto si è fatto con riferimento al carico $q = 53$ t. m. $^{-1}$ (fig. 5) che fornisce $M_2 > M_1$;

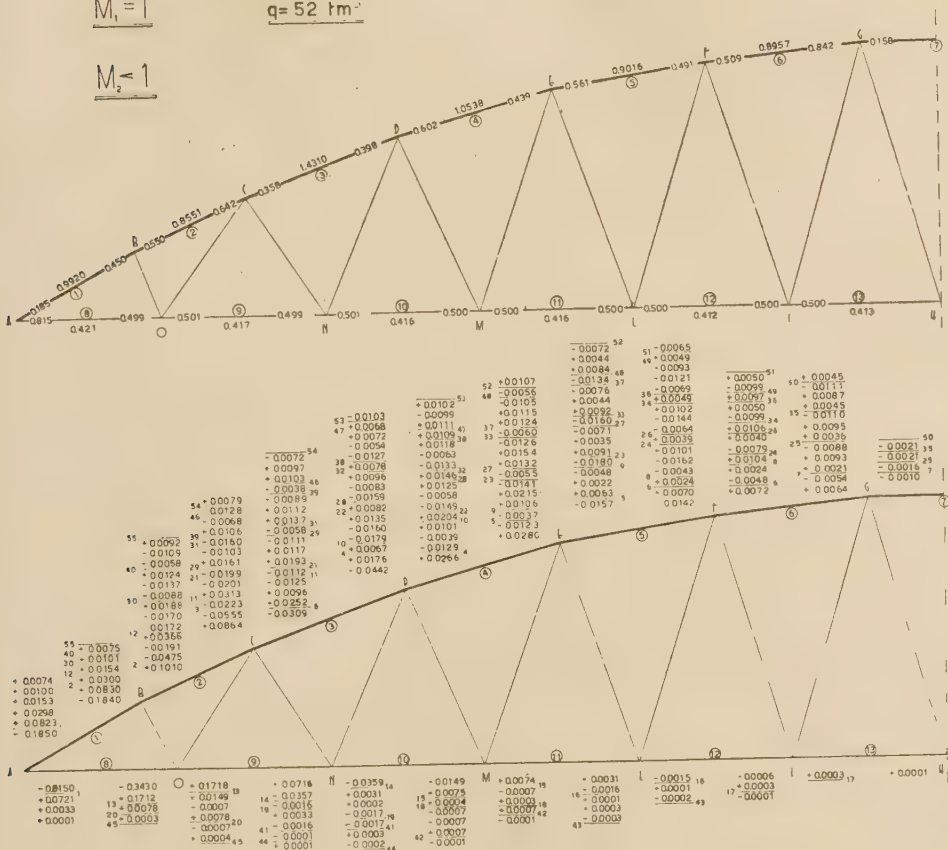



Fig. 7

ciò indica che il carico scelto è maggiore del q_{crit}, per cui si è operato un successivo tentativo con $q = 50$ t. m. $^{-2}$ (fig. 6). Questo conduce ad un valore $M_2 < M_1$ e quindi occorre ripetere il procedimento con un valore del carico compreso tra i precedenti ($q = 52$ t. m. $^{-1}$, (fig. 7).

L' indice della instabilità è dato, più che dalla uguaglianza fornita dalla seconda delle (12), da una indagine relativa alla convergenza o divergenza

del procedimento di Cross [1]. E' quanto avviene, nel caso in esame, con riferimento ai carichi $q = 52$ t. m.$^{-1}$ e $q = 52{,}5$ t. m.$^{-1}$ (fig. 7 e 8). In entrambe queste condizioni, dopo un numero notevole di equilibramenti, si è ancora lontani dall'annullamento dei residui; nel primo caso però i momenti squilibrati, presenti alla fine di ogni ciclo, vanno diminuendo (lenta convergenza) e così pure è decrescente la progressione dei momenti rinviati nel nodo A ($q < q_{crit.}$). Il contrario succede nel 2° caso ($q > q_{crit}$).

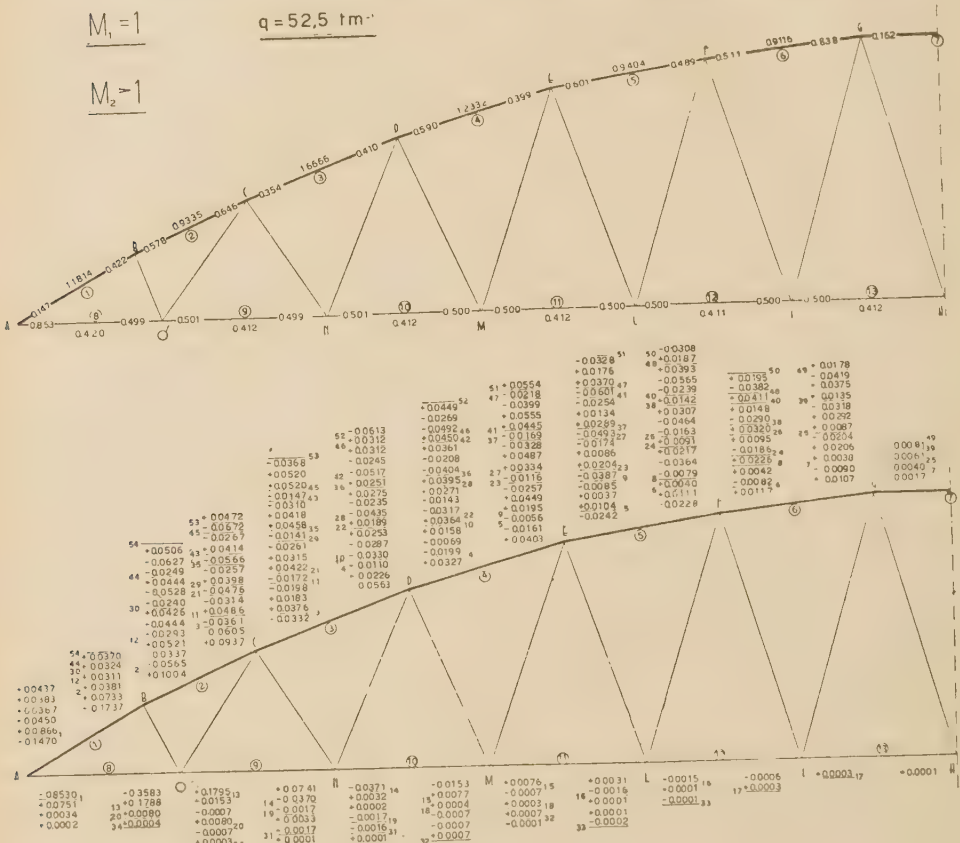



Fig. 8

Resta così fissato l' intervallo in cui è compreso il carico critico. As-

[1]) Nelle immediate vicinanze della instabilità il convergere o divergere del procedimento avviene, come già si è fatto osservare, in maniera lentissima, di modo che è praticamente impossibile annullare i residui per l'elevato numero di cicli che occorrerebbe operare.

sunto come carico critico quello corrispondente al limite inferiore di questo intervallo, ed essendo, con riferimento ad un solo arco, $g = 4.1$ t.m.$^{-1}$ $a = 2,5$ t. m.$^{-1}$ si ha:

$$\lambda_{crit} = \frac{q_{crit}}{g + a} = \frac{52}{6,6} = 7,8787$$

Questo valore del moltiplicatore critico, già inferiore a quello tecnicamente consigliabile per aste in cemento armato caricate di punta, è ben lontano da quanto fornirebbe una analoga indagine svolta nell' ambito dell' elasticità lineare: e riconduce l' arco NIELSEN al livello di altre strutture simili, per quanto concerne sicurezza nei riguardi della instabilità.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Maggio 1955.

BIBLIOGRAFIA

1. A. GALLI. *Scienza delle Costruzioni,* Vol. II. Pellerano, Napoli, 1953.
2. A. GALLI. *Instabilità dell'equilibrio elastico,* Pellerano, Napoli, 1953.
3. S. TIMOSHENKO. *Theory of elastic Stability,* Mc Graw - Hill, New York, 1936.
4. E. LUNDQUIST. *Stability of structural members under axial load,* Technical note, n. 617, Ottobre 1937.
5. N. J. HOFF. *Stable and unstable equilibrium of plane frameworks,* Journal of the Aeronautical Sciences, dicembre 1946.
6. F. R. SHANLEY. *The Column Paradox,* Journal of the Aeronautical Sciences, Dicembre 1946.
7. F. R. SHANLEY. *Inelastic Column Théory,* Journal of the Aeronautical Sciences, Maggio 1947.
8. N. J. HOFF, B. A. BOLEY, S. V. NARDO, S. KAUFMAN. *Buckling of rigid-jointed plane trusses,* Proceedings of ASCE, 1950.
9. F. BLEICH. *Buckling strenght of metal structures,* Mc Graw-Hill, New York, 1952.
10. V. FRANCIOSI. *La stabilità dell' equilibrio elastico nei telai piani.* L' Ingegnere, 1953, n. 4.
11. V. FRANCIOSI, *Il carico di punta critico in regime elastoplastico.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat., Serie 4ª, Vol. XX, Napoli, 1953.
12. T. RENZULLI. *Il problema dell' asta caricata di punta in campo elastoplastico* (in corso di stampa).

TAB. 1 ($q = 53$ t. m. $^{-1}$)

Asta	l	N_{g+q}	$E \times 10^{-3}$	$k = \frac{EI}{l}$	$\frac{k}{k_o}$	$2u$	φ	ψ	ρ	c_t
1	6.6	— 4939.846	660	2520	1.0535	3.5969	— 4.2648	— 1.4740	1.9619	1.4466
2	6.1	4914.277	720	2974	1.2433	3.1746	— 61.1832	— 28.9806	1.1263	1.0555
3	7.9	— 4888.071	750	2392	1.0000	4.0175	— 2.3200	— 0.4385	1.1406	2.6454
4	7.8	— 4785.901	915	2956	1.2356	3.5536	— 4.7617	— 1.7292	2.3932	1.3769
5	7.7	— 4675.915	1080	3534	1.4774	3.1916	— 38.3794	— 18.5772	3.5594	1.0329
6	7.6	— 4667.098	1110	3680	1.5385	3.1044	52.3180	24.7636	3.8606	0.9774
7	7.5	— 4627.028	1115	3881	1.6225	2.9903	12.6437	6.9168	0.3677	0.9139
8	»	4282.523	21000	7773	3.2496	2.0319	—	—	14.9482	0.418
9	»	4415.023	»	»	»	2.0635	—	—	14.9807	0.416
10	»	4510.423	»	»	»	2.0865	—	—	15.0431	0.413
11	»	4510.423	»	»	»	2.0865	—	—	15.0431	0.413
12	»	4605.823	»	»	»	2.1080	—	—	15.0456	0.410
13	»	4563.423	»	»	»	2.0973	—	—	15.0294	0.412

TAB. 2 ($q = 50$ t. m. $^{-1}$)

Asta	l	$N_{q,q}$	$E \times 10^{-3}$	$k = \frac{EI}{l}$	$\frac{k}{k_0}$	$2u$	φ	ψ	ρ	c_t
1	6.6	— 4692.346	1110	4238	1.1356	2.7032	4.4030	2.7779	3.2973	0.7925
2	6.1	— 4666.477	1140	4709	1.2618	2.4585	2.8739	1.9958	3.9381	0.7072
3	7.9	— 4641.171	1170	3732	1.0000	3.1343	614.5844	307.8998	2.4712	0 9980
4	7.8	— 4544.401	1254	4051	1.0855	2.9578	10.4188	5.8018	2.8964	0.8979
5	7.7	— 4439.515	1425	4664	1.2497	2.7074	4.4499	2.7990	3.6386	0.7949
6	7.6	— 4430.998	1440	4775	1.2795	2.6557	3.9875	2.5645	3.7837	0.7774
7	7.5	— 4393.023	1464	4919	1.3181	2.5880	3.5141	2.3235	0.9691	—
8	»	4068.023	2100	7773	2.0828	1.981	—	—	9.5600	0.426
9	»	4193.023	»	»	»	1.994	—	—	9.5795	0.424
10	»	4283.023	»	»	»	2.032	—	—	9.5809	0.418
11	»	4283.023	»	»	»	2.032	—	—	9.5809	0.418
12	»	4373.023	»	»	»	2.055	—	—	9.6017	0.414
13	»	4333.023	»	»	»	2.045	—	—	9.5913	0.416

TAB. 3 ($q = 52$ t. m. [1])

Asta	l	N_{g+q}	$E \times 10^{-3}$	$k = \frac{EI}{l}$	$\frac{k}{k_0}$	$2u$	φ	ψ	ρ	c_t
1	6.6	— 4857.346	858	3276	1.1116	3.1282	151.0306	76.1220	2.7593	0·9920
2	6.1	— 4831.677	870	3594	1.2195	2.8636	6.9055	4.0378	3.3709	0.8551
3	7.9	— 4805.771	924	2947	1.0000	3.5890	— 4.3553	— 1.5217	1.8813	1.4310
4	7.8	— 4705.301	1095	3538	1.2005	3.2209	— 24.1205	— 11.4448	2.8493	1.0538
5	7.7	— 4597.115	1230	4025	1.3658	2.9654	10.8696	6.0278	3.6335	0.9016
6	7.6	— 4588.398	1236	4098	1.3906	2.9170	8.5342	4.8562	3.7695	0.8957
7	7.5	— 4549.023	1283	4344	1.4740	2.8023	5.6700	3·4157	0.7074	—
8	»	4211.023	21000	7773	2.6376	2.0157	—	—	12.1277	0.421
9	»	4341.023	»	»	»	2.0466	—	—	12.1461	0.417
10	»	4434.623	»	»	»	2.0686	—	—	12.1857	0.416
11	»	4434.623	»	»	»	2.0686	—	—	12.1857	0.416
12	»	4528.223	»	»	»	2.0903	—	—	12.1936	0.412
13	»	4486.023	»	»	»	2.0807	—	—	12.1910	0.413

TAB. 4 ($q = 52{,}5$ t. m.$^{-1}$)

Asta	l	N_{g+q}	$E \times 10^{-3}$	$k = \frac{EI}{l}$	$\frac{k}{k_0}$	$2u$	φ	ψ	ρ	c_t
1	6.6	— 4898.596	740	2825.5	1.0240	3.3827	— 8.2296	— 3.4830	2.2290	1.1814
2	6.1	— 4872.977	785	3242.9	1.1753	3.0276	16.7907	8.9933	3.0497	0.8335
3	7.9	— 4846.921	865	2759.2	1.0000	3.7252	— 3.3723	— 1.0117	1.6680	1.6666
4	7.8	— 4745.601	972	3142.2	1.1381	3.4333	— 6.7429	— 2.7339	3.3981	1.2332
5	7.7	— 4631.515	1180	3861.8	1.3996	3.0405	18.9142	10.0562	3.6118	0.9404
6	7.6	— 4627.748	1190	3945.8	1.4301	2.9855	12.2668	6.7280	3.7745	0.9116
7	7.5	— 4588.023	1293	4344.8	2.5747	2.8142	5.8738	3.5184	0.7318	—
8	»	4246.773	21000	7773.0	2.8171	2.0243	—	—	12.9530	0.420
9	»	4378.023	»	»	»	2.0580	—	—	12.9868	0.413
10	»	4472.523	»	»	»	2.0774	—	—	13.0206	0.412
11	»	4472.523	»	»	»	2.0774	—	—	13.0206	0.412
12	»	4567.023	»	»	»	2.0995	—	—	13.0319	0.411
13	»	4525.023	»	»	»	2.0895	—	—	13.0150	0.412

Le falde tridimensionali dell' S_5 determinate dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa

Nota del Socio ordinario **Nicolò Spampinato**

(pervenuta all' Accademia il dì 23 agosto 1955)

Sunto. — Questa nota fà seguito alla nota presentata nell' Adunanza del di 7 maggio 1955 dal titolo " *Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa* ". Sono studiate le falde tridimensionali della V_3 di S_5, determinata da una data curva algebrica c^n, rispondenti ai rami lineari e superlineari di c^n.

La numerazione, sia dei paragrafi, sia delle formule, segue la corrispondente numerazione di detta nota.

13. — *Le falde tridimensionali della* V_3^{m+n} *dederminate dai rami di* c^n.

Siano

$$x_j = x^*_j + c_j \rho + d_j \rho^2 + \ldots\ldots \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{44}$$

le equazioni parametriche di un ramo di c^n avente per origine il punto $P^* (x^*_j)$.

Se i coefficienti c_j non sono tutti nulli e non proporzionali alle coordinate x_j^* dell' origine, la tangente al ramo nell' origine è la retta t_j^* di equazioni parametriche

$$x_j = x_j^* + c_j \rho \tag{45}$$

prima ridotta delle equazioni parametriche (44) del ramo. *La retta* t^* *sarà tangente a* c^n *nel punto* P^*, (una delle tangenti a c^n in P^* nel caso che P^* sia multiplo per c^n). Il piano π^* congiungente P^* con la retta di S'_2 omologa di t^* nella proiettività di equazioni (5), sarà un piano generatore della $V_3^{m,n}$, quello rispondente alla coppia (P^*, t^*) della curva completa C^{m+n}, determinata da c^n. Nel piano S'_2 le equazioni parametriche della retta omologa di t^* per la (5) sono :

$$y_j = x_j^* + c_j \rho. \tag{47}$$

Ne segue che le equazioni parametriche del piano π^*, con i due parametri non omogeni λ, ρ, sono :

$$x_j = \lambda\, x_j^* \quad , \quad y_j = x_j^* + c_j \rho \tag{47}$$

Si ha perciò:

I) *Le equazioni parametriche del piano generatore* π^* *della* $V^{n,m}$ *determinato dalla coppia* (P^*, t^*), *punto origine e retta tangente del ramo di* c^n *di equazioni parametriche* (45), *con le* c_j *non proporzionali alle* x_j^*, *sono date dalle* (47), *con i parametri non omogenei* λ, ρ.

Facciamo ora descrivere alla coppia (F^*, t^*) un ramo della curva completa $C^{n,m}$, facendo descrivere a P^* un ramo di c^n di equazioni parametriche

$$(48) \qquad x_j^* = x'_j + p_j \mu + q_j \mu^2 + \ldots\ldots$$

Si noti che nel punto P^* del ramo rispondente ad un fissato valore $\mu = \mu_1$ del parametro μ [interno ad un campo comune ai tre cerchi di convergenza delle tre serie a secondo membro delle (48), che indicheremo con $F_j(\mu)$] la tangente alla c^n in P^* ha le equazioni parametriche:

$$(49) \qquad x_j = F_j(\mu_1) + F'_j(\mu_1)\,\eta.$$

Ne segue che, volendo scrivere le equazioni parametriche del piano generatore π^* rispondente alla coppia (P^*, t^*), con P^* di coordinate $x_j^* = F_j(x)$, nelle (47) al posto delle x_j^* bisogna sostituire le serie $F_j(\mu)$ e al posto delle c_j, per le (49), bisogna sostituire le $F'_j(\mu)$, supposte non tutte nulle nè proporzioni alle $F_j(\mu)$. Eseguendo detta sostituzione si hanno le equazioni:

$$(50) \qquad x_j = \lambda\, F_j(\mu) \qquad , \qquad y_j = F_j(\mu) + F'_j(\mu)\,\rho\,.$$

II) *Le* (50), *in corrispondenza ad un fissato valore di* μ, *dànno le equazioni parametriche del piano generatore della* $V^{n,m}$, *rispondente alla coppia* (P^*, π^*) *di* $C^{n,m}$. *Facendo variare* μ, *nel campo comune ai tre cerchi di convergenza delle tre serie* $F_j(\mu)$, *le* (50) *dànno le equazioni parametriche della falda tridimensionale [della varietà* $V^{n,m}$*] descritta da tale piano generatore, al variare di* P^* *nel ramo di* c^n *di equazioni parametriche*

$$(48') \qquad x_j = F_j(\mu)\,.$$

Si noti esplicitamente che le coordinate $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ del punto variabile in tale falda sono *funzioni lineari dei due parametri* λ e ρ, e *funzioni algebriche del parametro* μ.

Tenendo conto delle posizioni (48) l' equazioni della falda tridimensionale, rispondente al ramo di c^n (48) dato, sono:

$$\begin{cases} x'_j = x'_j \lambda + p_j \lambda \mu + q_j \lambda \mu^2 + r_j \lambda \mu^3 + \ldots\ldots \\ y_j = (x'_j + p_j \mu + q_j \mu^2 + r_j \mu^3 + \ldots) + (p_j + 2q_j \mu + 3r_j \mu^2 + \ldots)\,\rho \end{cases}$$

Ovvero:

$$(51)\quad \begin{cases} x_j = x'_j \lambda + p_j \lambda \mu + q_j \lambda\mu^2 + r_j \lambda\mu^3 + \dots \\ y_j = x'_j + p_j (\mu + \rho) + q_j (\mu^2 + 2\mu\rho) + r_j (\mu^3 + 3\mu^2 \rho) + \dots \end{cases}$$

14. — *Le ridotte della falda tridimensionale* (51) *e le falde rispondenti ai rami ridotti del ramo.*

a) L' origine della falda (51) [se le x'_j non sono tutte nulle cioè se l' origine del ramo (48) è il punto A (x'_j) del piano S_2 (x_j), [caso a cui si può sempre ricondurre dividendo eventualmente per un fattore tutti i secondi membri dell' equazioni parametriche del ramo, tenendo conto che le x_j sono definite a meno di un fattore] *è il punto* A' *del piano* S'_2 (y_j) *di coordinate* $(O, x'_1, O, x'_2, O, y_3)$, *cioè il punto di* S'_2 *omologo nella proiettività di equazioni* (5) *del punto* A *di* S_2 *origine del ramo dato.*

b) La ridotta di grado 1 *della falda tridimensionale* (51) *non risulta tridimensionale, ma bidimensionale,* e precisamente di equazioni:

$$(52)\qquad x_j = x'_j \lambda \quad , \quad y_j = x'_j + p_j \sigma \qquad (\sigma = \mu + \rho)$$

Tale ridotta è, pertanto, il piano che congiunge i tre punti

$$(53)\qquad \begin{array}{l} A\ (x'_1 . O, x'_2, O, x'_3, O) \\ A'\ (O, x'_1, O, x'_2, O, x'_3) \\ P'\ (O, p_1, O, p_2, O, p_3) \end{array}$$

supposte le p_j *non tutte nulle, e non proporzionali alle* x'_j, cioè *supposto che l' ordine del ramo dato* (48) *nell' origine sia* 1. Tali tre punti sono l' origine A del ramo nel piano S_2, il suo corrispondente A' nella proiettività (5) nel piano S'_2, ed il punto P' di S'_2 che congiunto con il precedente dà la retta t' di S'_2 omologa della tangente t al ramo dato in S_2 nel suo punto origine, cioè della retta di equazioni [prima ridotta del ramo (48)]:

$$(54)\qquad x_j = x'_j + p_j \mu.$$

Ne segue che detto piano, congiungente i tre punti (53) *è il piano generatore* $\pi = At'$ *della varietà* V^{n+m} *rispondente al punto origine* A *del ramo della* c^n, *di equazioni* (48).

c) La ridotta di grado 2 della falda (51), *è la varietà rappresentata dall' equazioni parametriche:*

$$(55)\qquad x_j = x'_j \lambda + p_j \lambda\mu \quad , \quad y_j = x'_j + p_j (\mu + \rho) + q_j (\mu^2 + 2\mu\rho)$$

Tale varietà appartiene all' S_4 di S_5, passante per S'_2, di equazione:

$$(56) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = O,$$

dato che dalle (55) risulta che le tre variabili x_j sono combinazioni lineari delle due terne (x'_j) e (p_j), secondo i fattori λ e $\lambda\mu$. Tale S_4, di equazione (56), seca l' S_2 (x_j) nella retta t rappresentata dalla stessa equazione, congiungente i punti A (x'_j) e P (p_j), cioè nella retta t tangente al ramo dato (48) nell' origine A, dato che tali due punti hanno per coordinate i termini noti ed i coefficienti del parametro μ al primo grado nelle (48).

A) *Nel caso che i coefficienti* q_j *siano tutte e tre nulli,* cioè nel caso che nelle tre serie di potenze che costituiscono i secondi membri dell' equazioni (48) del ramo dato in c^n non abbiano termini di grado 2 nel parametro μ, le y_j risultano soddisfacenti all' equazione:

$$(57) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = O$$

che rappresenta nel piano S'_2 (y_j) la retta t' corrispondente della retta t di equazione (56) nella proiettività (5). In tal caso tale varietà (55) è l' $S_3 = tt'$ (passante per il piano (52) che risponde all' origine del ramo).

Tale S_3 *è* perciò l' $S_3 = AA'\ PP'$ *congiungente il piano generatore della* $V_3^{n \cdot m}$ *rispondente all' origine* A *del ramo considerato, con il punto*

$$(54) \qquad P\,(p_1, O, p_2, O, p_3, O)$$

che congiunto con A *dà la tangente* t *al ramo in* A.

Si noti esplicitamente che le due ipotesi: le p_j non tutte nulle e le q_j tutte nulle, portano che il ramo (48) del piano S_2 *è di ordine 1 e prima classe* > 1, perchè la prima potenza in μ con coefficiente non nullo avrà l' esponente > 2. Sicchè se l'origine A del ramo è un punto semplice di c^n, la tangente a c^n in A, cioè la tangente t del ramo in A, di equazione parametriche (54) o di equazione (56), secherà la c^n in A contato almeno tre volte, cioè è una tangente di flesso, e perciò singolare per la curva completa $C^{n,m}$, essendo singolare [anzi a carattere cuspidale] per la curva inviluppo di classe m determinata da c^n. Ne segue che considerando il punto A_1 infinitamente vicino ad A nella tangente t, la tangente t_1 alla c^n in A_1 sarà coincidente con la retta t. Il piano generatore della $V_3^{n \cdot m}$ passante per A_1 sarà il piano $\pi_1 = A_1\, t'$, infinitamente vicino al piano gene-

ratore $\pi = At'$ rispondente al punto A, e secherà questo nella retta t', e *quindi* π e π_1 *sono conspaziali*, e congiunti dall'$S_3 = tt'$ [che in questo caso particolare rappresenta la ridotta di grado 2 della falda tridimensionale (51) della V_3^{n+m}, rispondente al ramo (48) considerato]. Possiamo perciò affermare che:

I) Se A *è un punto di flesso per* c^n, *i due piani generatori conspaziali della* V^{n+m}, *rispondenti ad* A *e al punto infinitamente vicino* A_1 *posto nella tangente di flesso, sono congiunti dall'* S_3 *di* S_5 *che rappresenta la ridotta di grado 2 della falda tridimensionale della* V^{n+m} *determinata dal ramo di* c^n *avente per origine il punto* A. *Tale* $S_3 = AA' \; PP'$ *risponde in* S_5 *alla ridotta di grado* 1 *del ramo, costituita dalla retta* $t = AP = AA_1$ *tangente al ramo in* A.

Questo caso si presenta quando nell' equazioni (48) *del ramo sono nulli i tre coefficienti* q_j, *ed è di caratteristica* 2 *la matrice:*

$$(55) \qquad \left\| \begin{matrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{matrix} \right\|$$

oltre all' ipotesi che il punto A (x'_1, x'_2, x'_3) *di* c^n *sia semplice* [*Conseguentemente* A *è un flesso per* c^n].

Volendoci riferire al ramo di origine A di c^n, di equazioni parametriche (48), *indipendentemente che* A *sia semplice o multiplo per* c^n, in tali ipotesi resta sempre la proprietà che *i due piani generatori della falda tridimensionale* (1) della V_3^{n+m}, *rispondenti all' origine* A *del ramo e al punto* A_1 *del ramo infinitamente vicino ad* A (posto nella tangente t al ramo in A) *risultano conspaziali* e l'$S_3 = tt'$ *che li congiunge è la ridotta di grado* 2 *della falda*. Tale ridotta, fra le ridotte della falda, *è la prima che risulta a tre dimensioni* [essendo la ridotta di grado zero il punto origine A' della falda, e la ridotta di grado 1, bidimensionale, è precisamente il piano AA' P', e quindi costituisce una *seconda origine* della falda, piano che, come abbiamo sopra osservato, nella varietà V_3^{n+m} risponde al punto A di c^n come origine del ramo (48) considerato in c^n]. Ne segue che l' $S_3 = tt'$ [dato che costituisce la successiva ridotta della falda, che risulta a tre dimensioni] sarà tangente alla falda dell' origine A', e nella seconda origine $\pi = AA' \; P' = At'$ dato che contiene anche il piano generatore della falda $\pi_1 = A_1 t'$ infinitamente vicino π. Si ha perciò:

II) *Ad un ramo di* c^n *di equazioni del tipo:*

$$x^*_j = x'_j + p_j \mu + r_j \mu^3 + \ldots$$

con la matrice (55) *di caratteristica* 2 (*di ordine* 1 *e prima classe* > 1) risponde nella V_3^{n+m} *una falda tridimensionale di equazioni*

$$\begin{cases} x_j = x'_j \lambda + p_j \lambda\mu + r_j \lambda\mu^3 + \ldots \\ y_j = x'_j + p_j (\mu + \rho) + r_j (\mu^3 + 3\mu^2)\rho + \ldots \end{cases}$$

con l'origine nel punto $A'(O, x'_1, (O, x'_2, O, x'_3)$, *una seconda origine nel piano* $\pi = At'$ *della* V_3, *rispondente all'origine* A *del ramo. Il piano generatore* π_1 *successivo è conspaziale con* π *ed è dato da* $A_1 t'$ *con* A_1 *successivo ad* A *nel ramo. L'* $S_3 = tt'$ *che li congiunge è tangente alla falda nel punto prima origine, e nel piano seconda origine* [*Se* A *è un punto semplice della* c^n *si ha la proprietà* I].

B) *Nel caso che i coefficienti* q_j *non sono tutti nulli,* con

$$(58) \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ p_1 & p_2 & o_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} \pm o,$$

la ridotta (55) di grado 2 della falda (51) non è un S_3, ma una V_3 dell'S_4 congiungente la retta t di S_2, rappresentata in S_2 dalle prime tre equazioni parametriche (55), con l' S'_2 (y_j). Tale V_3 risulta costituita da ∞^1 piani, perchè per ogni fissato valore di μ le (55) risultano funzioni lineari dei due parametri non omogenei λ, ρ. Un tale piano nel piano S_2 seca il punto M della retta AP avente per coordinate le x_j date dalle prime tre (55), ripondente al valore μ fissato; invece nel piano S'_2 seca la retta avente per equazioni le seconde equazioni (55), con il fissato valore per μ. Questa retta, diciamo r, ha perciò le equazioni: (mettendo in evidenza il parametro ρ).

$$(59) \qquad y_j = (x_j' + p_j \mu + q_j \mu^2) + (p_j + 2q_j \mu)\rho.$$

Gli ∞^1 piani della V_3 ridotta di grado 2 della falda, in questo caso, sono perciò del tipo Mr', con il punto M variabile nella retta AP e la retta r' variabile nel piano S'_2 rispondente ciascuna coppia (M, r') ad un fissato valore del parametro μ. Ora la retta r' di equazioni parametriche (59), col parametro non omogeneo ρ, è la retta congiungente i due punti di S'_2

$$(60) \qquad R'(x'_j + p_j \mu + q_j \mu^2) \quad , \quad N'(p_j + 2q_j \mu)$$

variabili, al variare di μ, il primo nella conica di equazioni:

$$(61) \qquad y_j = x'_j + p_j \mu + q_j \mu^2.$$

ed il secondo nella retta di equazioni parametriche,

$$(62) \qquad y_j = p_j + 2q_j\,\mu.$$

Si noti che la conica (61) e la corrispodente nella proiettività (5) della conica di S_2, di equazioni parametriche date dalla ridotta di grado 2 del ramo (48), cioè della *conica osculatrice principale* a detto ramo nel punto origine. [1])

Essendo le coordinate di N' le derivate delle cordinate di R', rispetto al parametro μ, la retta $r' = RN'$ è la tangente nel punto R' della conica (61) descritta da R' al variare di μ. Ne segue che: *il piano* Mr' *descrive al variare di* M *nella retta* AP, *una* V_3 *di ordine 3, dell'* $S_4 = APS'_2$, *con il piano* S'_2 *doppio.* Infatti per un punto di S'_2 passano due rette r' tangenti alla conica (61) e quindi per un tale punto passano due piani generatori della V_3, cioè S_2 è doppio per la V_3. Secando qnesta con un S_3 di S_4, ambiente della V_3, passante per il piano S'_2, detto M_1 il punto in cui S_3 seca la retta AP, il piano generatore della V_3 passante per M_1 (appoggiato ad S'_2 in una retta) sarà l'unico piano generatore della V_3 contenuto in S_3. La sezione di S_3 con la V_3 è pertanto costituita da detto piano generatore e dall' S'_2 doppio. Perciò la V_3 è di ordine 3. Si ha dunque:

III) *Ad un ramo di* c^n *di equazioni* (48) *con il determinante* (58) *non nullo,* (*di ordine* 1 *e prima classe* 1) *risponde nella* $V_3^{n\cdot m}$ *una falda tridimensionale di equazioni* (51) *con l' origine nel punto* $A'(x'_1, O, x'_2, O, x'_3)$ *una seconda origine nel piano* $\pi = At'$, *rispondente all' origine* A *del ramo, e con la ridotta di grado* 2 *tridimensionale costituita da una* V^3_3, *dell'* $S_4 = APS'_2$, *con l'* S'_2 *doppio, secante l'* S_2 *nella retta* AP *tangente al ramo in* A. *Essa è costituita da* ∞^1 *piani generatori* $MR'N'$, *con* M *variabile in* AP *e la retta* $r' = R'N$ *variabile, proiettivamente ad* M, *nell' inviluppo delle tangenti alla conica di* S'_2 *di equazioni* (61), *corrispondente nella proiettività* (5) *fra* S_2 *ed* S'_2 *della conica osculatrice principale del ramo nell' origine* A.

Si noti esplicitamente che, nel caso attuale, cioè nel *caso generico*, il piano generatore della $V_3^{n\cdot m}$ $\pi = At'$, rispondente all' origine del ramo, ed il piano infinitamente vicino $\pi_1 = A^1t'_1$, con A_1 in AP infinitamente vicino ad A, *non sono conspaziali*, come nel caso precedente. Il loro iperspazio congiungente è l' S_4 ambiente della V^3_3 a cui essi appartengno, ed hanno in comune il punto A'_1 intersezione di t' e t'_1. Sarà A'_1 l' omologo di A_1 nella proiettività (5).

---

[1]) *N.* SPAMPINATO. Curve e superficie osculatrici principali, " (Giornale di *Matematiche di Battaglini. Editori Pellerano - Del Gaudio - Napoli. Volume LXXXIII — 1955.*

C) *Nel caso che i coefficienti* p_j *siano tutti nulli, e le* q_j *non tutti nulli e non proporzionali alle* x'_j *il ramo* (48) *risulta di ordine* 2, *con la tangente* [*nell' origine* A (x'_j), *nella retta congiungente* A *con il punto* Q (q_j)], *data dalla ridotta di grado* 2,

$$x_j = x'_j + q_j \mu^2. \tag{63}$$

In questo caso la *ridotta di grado* 2 *della falda* tridimensionale (51) rispondente al ramo è data da:

$$x_j = x'_j \lambda \quad , \quad y_j = x'_j + q_j (2\mu\rho). \tag{63}$$

Tale ridotta costituisce il piano congiungente i tre punti

$$(65) \qquad \begin{array}{l} A' \ (O, x'_1, O, x'_2, O, x'_3) \\ A \ (x'_1, O, x'_2, O, x'_3, O) \\ Q' \ O, q_1, O, q_2, O, q_3) \end{array}$$

e costituisce una *seconda origine* della falda [che ha già una prima origine nel punto A']. In questo caso per avere una ridotta tridimensionale occorre considerare la *ridotta di grado 3*, delle (51) data da:

$$x_j = x' \lambda + q_j \lambda\mu^2 \quad , \quad y_j = x'_j + q_j (\mu^2 + 2\mu\rho) + r_j (\mu^3 + 3\mu^2\rho). \tag{66}$$

Qui occorre distinguere due sotto casi secondo che punto R (r_j) del piano S_2 appartiene o no alla retta AQ tangente al ramo in A, cioè secondo che è nullo, o non nullo, il determinante

$$(67) \qquad \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_3 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}$$

a) Nel *primo caso* le (66) rappresentano l' S_3 congiungente la retta AQ di S_2 con la retta A' Q' di S'_2 omologa di AQ nella proiettività (5), perchè x_j e le y_j date dalle (66) soddisfano alle due equazioni

$$(68) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = O \quad , \quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = O$$

di dette due rette nei due piani S_2 (x_j) ed S'_2 (y_j). In questo caso, pertanto, la ridotta tridimensionale della falda è un S_3, e precisamente

l' $S_3 = AA'QQ'$. [Si noti esplicitamente che questo caso si presenta anche quando il punto R (r_j) risulta indeterminato, cioè le r_j sono tutte e tre nulle, cioè quando le equazioni pel ramo (48) sono del tipo (con $p_j = r_j = 0$)

$$(69) \qquad x = x'_j + q_j \mu^2 + t_j \mu^4 + \ldots .$$

[dovendo essere nulli i coefficienti di μ^3] *In questo caso il ramo è di ordine 2 e di classe > 1,* essendo nullo il determinante (67). La retta tangente AQ seca il ramo in A contato almeno quattro volte, cioè due volte in più dell'ordine 2 del ramo, e quindi il ramo nella retta AQ ha altri due punti infinitamente vicini ad A, diciamo A_1 ed A_2, e la tangente al ramo in A_1 sarà ancora la retta $AQ = A_1 A_2$. Ciò porta che i due piani generatori della V_3 rispondenti ai due punti A ed A_1, infinitamente vicini, sano conspaziali e congiunti dall' $S_3 = AA'QQ'$ essendo tali piani dati da $AA'A'_1$ ed $A_1 A'_1 A'_2$, indicando con A'_1 ed A'_2 gli omologhi di A_1 ed A_2 nella proiettività (5).

b) *Considerando ora il caso che il determinante* (62) *sia non nullo* e quindi la classe del ramo è 1. In questo caso le (66) non rappresentano un S_3, ma una V_3 dell' S_4 congiungente la retta $t = AQ$ di S_2, rappresentata dalle prime tre equazioni (66), con l' S'_2. Tale V_3 risulta costituita da ∞^1 piani, perchè per ogni fissato valore μ le (66) risultano funzioni lineari dei due parametri non omogenei λ, ρ. Un tale piano S_2 [come nel caso delle equazioni (55)] seca il piano S_2 nel punto M di coordinate date dalle prime tre equazioni (66), punto della retta AQ. Tale piano seca, invece, il piano S'_2 in una retta avente per equazioni le seconde tre (66). Questa retta e la retta r' congiungente i due punti

$$(70) \qquad R'(x'_j + q_j \mu^2 + r_j \mu^3) \quad , \quad T'(2q_j \mu + 3r_j \mu^2).$$

Al variare di μ il punto R' descrive la cubica di equazioni

$$(71) \qquad y_j = x'_j + q_j \mu^2 + r_j \mu^3$$

ed il punto T' descrive la conica di equazioni

$$(22) \qquad y_j = 2q_j \mu + 3r_j \mu^2.$$

La retta R' T' è la tangente alla cubica di equazioni (71) nel punto R', perchè le coordinate di T' sono le derivate delle coordinate di R'. La retta r' descrive, pertanto, *la curva inviluppo delle tangenti alla cubica di equazioni* (71). Questa cubica del piano S'_2 (y_j) è la omologa nella proiettività (5) della cubica di S_2, *ridotta di grado* 3 del ramo dato, che in questo caso ha l'equazioni (essendo le $p_j = 0$):

$$(48_1) \qquad x_j = x'_j + q_j \mu^2 + r_j \mu^3 + \ldots .$$

Tale cubica ridotta ha nel punto A (x'_j) un punto doppio cuspidale, con la tangente cuspidale nella retta AQ (tangente al ramo nell' origine A). Tale cubica è quindi di classe 3. Ne segue che l'inviluppo delle rette R′ T′ nel piano S'_2 è pure di classe 3. Per un generico punto di S'_2 escono tre rette dell' inviluppo e quindi tre piani generatori della V_3. Il piano S'_2 è perciò triplo per la V_3. Si osservi inoltre che un S_3 dell' S_4 ambiente della V_3 passante per S'_2 seca la retta AQ del piano S_2, contenuta dell'S_4, in un punto, per cui passa un piano generatore della V_3 che sarà contenuto in detto S_3, dato che si appoggia ad un S_2 in una retta. Quindi detto S_3 seca la V_3 di S_4 nel piano S'_2 contato tre volte e in un piano residuo. La V_3 è pertanto di ordine 4. Raccogliendo si ha:

IV) *Ad un ramo di* c^n *di equazioni* (48_1) *con il determinante* (67) *nullo (di ordine 2 e classe > 1) risponde nella* V_3^{n+m} *una falda tridimensionale avente per origine il punto* A′, *una seconda origine nel piano generatore della* V_3, *rispondente all' origine* A *del ramo, con la ridotta di grado* 3 *costituita dall'* S_3 *congiungente la tangente* AQ *al ramo in* A, *con l'* S'_2, *e contenente il piano generatore costituito dall' origine, ed il piano generatore successivo. Nel caso che il determinate* (67) *sia non nullo (ramo di ordine* 2 *e di classe* 1) *la ridotta di grado tre della falda è una* V_3^4, *costituita da* ∞^1 *piani generatori secanti* S_2 *nei punti di* AQ *ed* S_2 *nelle rette tangenti ad una cubica di classe* 3, *di equazioni* (71); *omologa nella proiettività* (5) *della ridotta di grado* 3 *del ramo dato, costituita da una cubica con un punto cuspidale nell'origine* A *del ramo e la tangente cuspidale nella tangente* AQ *al ramo in* A.

Si noti esplicitamente che in questo secondo caso (ramo di ordine 2, ma di classe 1) il piano generatore della V_3^{n+m}, infinitamente vicino al piano generalore rispondente all' origine del ramo [è contenuto nella V^4_3 che dà la ridotta di grado 3] *non o cospaziale* con detto piano origine, come nel caso precedente della classe > 1, in cui la ridotta di grado tre della falda era un S_3, e non una V_3^4 di S_4. *Sarà questo* S_4 *l' iperspazio congiungente detti due piani nel caso della classe* 1.

Si noti inoltre che V^4_3 di equazioni parametriche (66), nel caso che il delerminate (67) sia non nullo, è legata alla varietà di S_5 rispondente alla cubica c^3 del piano S_2 ridotta di grado 3 del ramo (48_1), con un punto doppio nodale in A (x_i). Scrivendo infatti le equazioni parametriche di questa varietà (che sarà di ordine $n + m = 3 + 4 = 7$)) sotto forma di falda tridimensionale rispondente al ramo che costituisce tale cubica con l' origine in A, si scorge che la ridotta di grado 3 di tale falda è la (66) stessa.

15. — *La falda tridimensionale della* $V_3^{n'm}$ *determinata da un ramo di ordine* v *e classi* v', v', v''' . . . , *della curva* c^n.

Dato un ramo di c^n di ordine v e classi v', v'', v''', . . di equazione (in coordinate non omogene $(x. y)$, con l'*origine nel punto* (O, O) e *la tangente nell' origine nella retta* y = ax):

$$(73) \qquad y = ax + bx^{\frac{v+v'}{v}} + cx^{\frac{v+v'+v''}{v}} + \ldots$$

lo stesso ramo, in coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) è rappresentato dall'equazioni:

$$(74) \qquad \begin{cases} x_1 = \rho^v \\ x_2 = a\rho^v + b\rho^{v+v'} + c\rho^{v+v+v'''} + \ldots\ldots \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

L' origine del ramo (dato dalla ridotta di grado zero) è A_3 (O, O, 1). La prima ridotta unidimensionale è quella di grado v:

$$(76) \qquad x_1 = \rho^v \quad , \quad x_2 = a\rho^v \quad , \quad x_3 = 1$$

e rappresenta la tangente all' origine A_3 del ramo, di equazione $x_2 = ax_1$ (contata v volte), che congiunge il punto A_3 con il punto A $(1, a, O)$. La ridotta non coincidente con la retta A_3 A tangente, è quella di grado $v+v'$ data da :

$$(77) \qquad x_1 = \rho^v \quad , \quad x_2 = a\rho^{v+v'} \quad , \quad x_3 = 1$$

e rappresentata una curva di ordine $v+v'$, passante per A_3 ed avente in A_3 la stessa tangente A_3 A del ramo. *Se è* $v > 1$ *il punto* A_3 *è multiplo per tale curva con la multiplicità* v. Secata con la retta r del fascio di centro A_3, di equazione

$$(78) \qquad x_2 = mx_1$$

v intersezioni cadono sempre in A_3 perchè sostituendo le (77) nella (78) si l' equazione :

$$(79) \qquad (a - m)\,\rho^v + b\rho^{v+v'} = O.$$

che ammette la radice $\rho = O$ con la multiplicità v. Nel solo caso particolare in cui è $a - m = O$, cioè in cui la retta del fascio coincide con la tangente al ramo $x_2 = ax_1$, la radice $\rho = O$ risulta con la multiplicità $v + v'$ eguale all' ordine della curva. Sicchè *la curva* (77) *ridotta di grado* v + v' *ha in* A_3 *un punto di multiplicità* v, *con la sola tangente nella tangente* A_3A *del ramo in* A, *e a contatto* (v + v') — *punto.*

Scriviamo ora le equazioni parametriche della falda tridimensionale $V_3^{n'm}$ determinata dal ramo della c^n di equazioni parametriche (74) appli·

cando le formole (50). A tale fine scriviamo le (74) nella forma (48′) sostituendo alle x_1, x_2, x_3 le x^*_1, x^*_2, x^*_3 e al parametro ρ il parametro μ:

$$(80) \qquad \begin{cases} x^*_1 = F_1(\mu) = \mu^v \\ x^*_2 = F_2(\mu) = a\mu^v + b\mu^{v+v'} + c\mu^{v+v'+v''} + \dots \\ x^*_3 = F_3(\mu) = 1 \end{cases}$$

Applicando le (50) si hanno le equazioni parametriche della falda:

$$(81) \qquad \begin{cases} x^1 = \lambda\mu^v \\ y_1 = \mu^v + v\rho\mu^{v-1} \\ x_2 = a\lambda\mu^v + b\lambda\mu^{v+v'} + c\lambda\mu^{v+v'+_a''} + \dots \\ y_2 = a\mu^v + va\rho^{v-1} + b\mu^{v+v'} + (v+v')\, b\rho\mu^{v+v'-1} + \dots \\ x_3 = \lambda \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

a) La ridotta di grado zero, che da l' origine della falda, è il punto

$$(82) \qquad A'_3\,(O,\ O,\ O,\ O,\ O,\ 1)$$

di S'_2 corrispondente dell' origine A_3 del ramo dato nel piano S_2 nella proiettività (5). Si ha perciò:

I) *La falda* (81) *tridimensionale di* S_5, *determinata dal ramo* (80) *dell'* S_2 (x_j), *ha sempre per origine il punto di* S'_2 *omologo nella proiettività* (5) *del punto origine del ramo assegnato in* S_2.

Andiamo ora a determinare le equazioni della *ridotta di grado* 1 della falda (81). Si hanno due casi diversi, secondo che è $v = 1$ o $v > 1$, e precisamente:

$$(83) \quad x_1 = O\ ,\ y_1 = \mu+\rho\ ,\ x_2 = O\ ,\ y_2 = a(\mu+\rho) \quad x_3 = \lambda\ ,\ y_3 = 1 \quad (\text{caso } v=1)$$

$$(84) \quad x_1 = O\ ,\ y_1 = O\ ;\ x_2 = O\ ,\ y_2 = O\ ,\ x_3 = \lambda\ ,\ y_3 = 1 \quad (\text{caso } v>1).$$

Le (84) rappresentano una retta che costituirà, pertanto, una seconda origine della falda tridimensionale. La retta è la generatrice $A_3\,A'_3$ della rigata V_2^{2n} (n° 4) rispondente all' origine A_3 del ramo assegnato in S_2.

Le (83) rappresentano un piano, quello di equazioni

$$(83') \qquad x_1 = O\ ,\quad x_2 = O\ ,\quad ay_1 - y_2 = O$$

congiungente il punto A_3, con la retta A'_3A' di S_2, omologa della retta

$A_3 A$ di S_2 nella proiettività (5). Si noti che tale piano $A_3 A'_3 A'$ è il piano della V_3^{n+m} rispondente al punto A_3 origine del ramo, con la tangente A_3A. Tale piano costituirà, per la falda tridimensionale, una seconda origine. Perciò in entrambi i due casi si ha una seconda origine, solo che per $v=1$ essa è un piano (il piano $A_3A'_3A'$) invece nel caso che l' ordine v del ramo sia > 1, tale seconda origine è una retta (la retta $A_3A'_3$). Si ha pertanto:

II) *La falda tridimensionele* (81) *determinata dal ramo* (80), *ha sempre una seconda origine: costituita da un piano se è* $v = 1$, *da una retta se* $v > 1$.

Nel caso $v = 1$ *il piano seconda origine è il piano* $A_3A'_3A'$, *generatore della* V_3^{n+m} *rispondente all' origine* A_3 *del ramo* (80).

Nel caso $v > 1$ *la retta secondo origine è la generatrice* $A_3 A'_3$ *della rigata* V_2^{2n} *contenuta nella* V_3^{n+m} *e rispondente all' origine* A_3 *del ramo.*

NOTA. Il teorema II) mette in evidenza la differenza, [nella rappresentazione il S_5 del ramo di S_2, (con la falda tridimensionale)] fra il *ramo lineare* (cioè di ordine $v = 1$) ed il *ramo superlineare* (cioè di ordine $v > 1$). *La differenza consiste nella dimensione della seconda origine della falda.* (La prima origine è sempre un punto). Si noti anche esplicitamente che detta seconda origine dà il piano generatore della V_3^{n+m}. rispondente al punto origine del ramo, solo nel caso lineare. Nel caso superlineare detta seconda origine dà una retta. *In questo caso per avere una ridotta di dimensione maggiore di 1, bisogna ricorrere ad una ridotta di grado* >1, come sarà precisato nel seguito della discussione, che faremo prima per il caso del ramo lineare e dopo per il ramo superlineare.

16. — *Falde tridimensionali rispondenti ai rami lineari.*

Le equazioni della falda (81), *nel caso* $v = 1$, cioè del ramo (80) lineare, ci dànno le equazioni

$$(85)\quad \begin{cases} x_1 = \lambda\mu \\ y_1 = \mu + \rho \\ x_2 = a\lambda\mu + b\lambda\mu^{v'+1} + c\lambda\mu^{v'+v''+1} + \dots\dots \\ y_2 = a\mu + a\rho + b\mu^{v'+1} + (v' + 1)\, b\rho\mu^{v'} + \dots\dots \\ x_3 = \lambda \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

La ridotta di grado zero ed 1 sono state già calcolate. Calcoliamo ora

le equazioni della *ridotta di grado* 2. Si hanno due casi diversi, secondo che è $v' = 1$ o $v' > 1$, e precisamente:

$$(86)\quad \begin{cases} x_1=\lambda\mu \\ y_1=\mu+\rho \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2=a\lambda\mu \\ y_2=a\mu+a\rho+b\mu^2+b\rho\mu \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3=\lambda \\ y_3=1 \end{cases} \quad (\text{caso } v'=1)$$

$$(82)\quad \begin{cases} x_1=\lambda\mu \\ y_1=\rho+\mu \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=a\lambda\mu \\ y_2=a\mu+a\rho \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3=\lambda \\ y_3=1 \end{cases} \quad (\text{caso } v'>1)$$

Le (86) rappresentano in S_5 una W_3 dell' iperpiano di equazione $ax_1 - x_2 = O$, cioè nell' iperpiano $S_4 = S'_2\, A_3A$, congiungente l' S'_2 con la retta A_3A tangente al ramo dato in S_2.

Le (82) rappresentano, invece, l' S_3 di equazioni $ax_1 - x_2 = O$ e $ay_1 \quad y_2 = O$ cioè l' $S_3 = A_3AA'_3A'$ congiugente la suddetta tangente al ramo in A_3 con la retta $A'_3\, A'$, sua omologa nella proiettività (5) fra S_2 ed S'_2.

Per spiegare la diversità di dimensione nella ridotta di grado 2, si noti che per $v' = 1$ la tangente al ramo è a contatto bipunto nell'origine A_3, invece per $v' > 1$ detta tangente è a contatto tripunto [almeno] in A_3. Nel primo caso il piano generatore della $V_3^{v'v''}$ successivo a quello determinato dall' origine A_3, cioè determinato dal punto R successivo ad A_3 posto nella tangente A_3A, si ottiene congiungendo tale punto P_1 con la retta di S'_2 omologa della retta tangente successiva che sarà distinta dalla retta tangente al ramo in A_3. Conseguentemente tali due piani generatori successivi secano in S'_2 due rette distinte, ed il punto comune di queste sarà l' unico punto comune ai due piani, che saranno, pertanto, congiunti da un S_4, l' $S_4 = S'_2\, A_3\, A$. Invece nell' altro caso il piano generatore successivo secherà in S'_2 la stessa retta A'_3A' che seca quello rispondente all' origine, e quindi i due piani sono congiunti dall' $S_3 = A_3AA'_3A'$. Sicchè la ridotta di grado 2 appartiene, in ogni caso, all' S_h congiungente il piano generatore rispondente all' origine con il piano generatore rispondente al punto successivo all' origine nella tangente al ramo, e sarà $h = 3$ per $v' = 1$ e $h = 4$ per $v > 1$.

Si noti che *nel caso $v' > 1$* la tangente al ramo risulta a contatto $(v' + 1)$ — punto e quindi vi sono v' punti successivi ad A_3 posti nella tangente ed appartenenti al ramo; detti $P_1 . P_2 \ldots, P_{v'}$ tali punti, le v' tangenti nei punti A_3, P_1, $P_2, \ldots, P_{v'-1}$ risulteranno tutte sovrapposte alla tangente A_3A, e quindi i v' piani successivi generatori della $V_3^{v'v''}$ determinati da detti punti A_3, $P_1, \ldots, P_{v'-1}$ s' intersecheranno tutti nella retta A'_3A', del piano S'_2, e forniranno pertanto, $v' - 1$ *coppie di piani generatori successivi conspaziali. Un tale ramo interviene per* v' — 1 *unità nel calcolo del carattere cuspidale della curva* c'' *a cui il ramo appartiene.*

Tali $v' - 1$ coppie di piani generatori, successivi e conspaziali, appartengono tutte all' $S_3 = A_3AA'_3A'$, ridotta di grado 2 della falda. Nel caso $v'=2$ si ha una sola di tale coppie, e la tangente è a contatto tripunto. Ma per $v' > 2$ si hanno $v' - 1 > 1$ di tali coppie. Si noti però che in questo caso anche altre ridotte di grado >2 coincidono con l' S_3 dato dalla ridotta di grado 2, e precisamente le ridotte fino al grado v', perchè *la prima ridotta* (85) *che sia diversa dalla ridotta* (87) *di grado* 2 *e successiva a questa, è la ridotta di grapo* $v' + 1$. Raccogliendo si ha:

I) *La falda* (85) *tridimensionale determinata da un ramo lineare* ($v = 1$) *ha per ridotta di grado* 2:

a) *una* V_3 *di un* S_4 *se ha la prima classe* $v' = 1$. *In questo caso la coppia di piani generatori delle* V_3^{n+m} *rispondenti all' origine del ramo e al punto infinitamente vicino posto nella tangente al ramo non sono conspaziali, ma congiunti da detto* S_4.

b) *un* S_3 *se ha la prima classe* $v' > 1$. *In questo caso i* v' *piani generatori della* V_3^{n+m} *rispondenti all' origine del ramo e ad altri* $v' - 1$ *punti successivi posti nella tangente del ramo, sono conspaziali, e congiunti da detto* S_3.

In questo secondo caso coincidono con detto S_3 *anche le ridotte successive di grado* 3, 4, . . , v' [se è $v' > 2$].

Consideriamo ora la *ridotta di grado* $v' + 1$, nel caso $v' > 1$, e quindi $v' + 1 > 2$. E' data da:

$$(88) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda\mu \quad , \ x_2 = a\lambda\mu \quad , \ x_3 = \lambda \\ y_1 = \mu + \rho \quad y_2 = \mu + a\rho + b\mu^{v'+1} + (v'+1)\, b\rho\mu^{v'} \quad , \ y_3 = 1 \end{cases}$$

Le (88) rappresentano una W_3 dell' S_4 di equazioni $ax_1 - x_2 = 0$, come le (86), contenente l' S_3 ambiente dei v' piani generatori conspaziali rispondenti all' origine A_3 del ramo e ad altri $v' - 1$ punti successivi, posti nella tangente al ramo nell' origine. $P_1 \ldots P_{v'-1}$ Il successivo piano generatore della V_3^{n+m} determinato dal successivo punto $P_{v'}$ che il ramo ha nella tangente [a contatto $(v' + 1)$—punto] sarà congiunto con i precedenti dall' S_4 di W e perciò non sarà conspaziale con il precedente. Ciò deriva dalla circostanza che la tangente al ramo in $P_{v'}$ non cade nella tangente al ramo nell' origine, come avviene per i punti $P_1, \ldots P_{v'-1}$, ma sarà una retta r infinitamente vicina alla tangente A_3A e la secherà in $P_{v'}$. Il piano generatore determinato da $P_{v'}$ è pertanto il piano $P_{v'}\,r'$, essendo r' la retta di S'_2 omologa di r nella proiettività (5). Esso non appartiene all'$S_3 = A_3AA'_3A'$, ma seca questo nella retta che congiunge il punto $P_{v'}$ di A_3A con il suo omologo $P'_{v'}$ in A'_3A' in detta proiettività. Saranno pertanto, congiunti da un S_4, e precisamente dall' $S_4 = S'_2A_3A$. Si noti che questo S_4 è precisamente l'S_4

ambiente della W_3 di equazioni (88) dato dalla ridotta di grado $v' + 1$, della falda.

Si noti che la W_3 di equazioni (88), ridotta di grado $v' + 1$ della falda è costituita da ∞^1 piani generatori, ciascuno dei quali risponde ad un fissato valore del parametro μ, perchè gli altri due parametri non omogenei ρ e λ nei secondi membri della (88) intervengono al primo grado. Per avere le equazioni non parametriche di un tale piano generatore della W_3 basta eliminare ρ e λ. Eliminando λ dalle prime due si ha intanto l'equazione, non dipendente da μ. $ax_1 - x_2 = 0$. Eliminando λ dalla prima e dalla terza si ha l' equazione $x_1 - \mu x_3 = 0$. Ricavando ρ dalla quarta e sostituendo nella quinta si ha

$$y_2 = a\mu + b\mu^{v'+1} + (y_1 - \mu)\, a + (y_1 - \mu)(v' + 1)\, b\mu^{v'},$$

ovvero, posto

$$a\mu + b\mu^{v'+1} = h(\mu),$$

e conseguentemente:

$$h'(\mu) = a + (v' + 1)\, b\mu^{v'},$$

L' ultima equazione dà:

$$y_2 - h(\mu) + (y_1 - \mu)\, h'(\mu) = 0$$

ovvero, ordinando, sostituendo al posto di y_1 ed y_2 i rapporti $y_1 : y_3$ ed $y_2 : y_3$ e moltiplicando per y_3 [nelle (88) è $y_3 = 1$] si ha:

$$h'(\mu)\, y_1 - y_2 + (h(\mu) - \mu h'(\mu))\, y_3 = 0.$$

Si ha perciò: *Eliminando* λ e ρ dalle (88) *si ha il sistema*:

$$(88') \quad \begin{cases} ax_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - \mu x_3 = 0 \\ h'(\mu)\, y_1 - y_2 - (h(\mu) - \mu h'(\mu))\, y_3 = 0 \end{cases}$$

dove s'è posto:

$$h(\mu) = a\mu + b\mu^{v'+1}$$

Per $\mu = 0$ le (88') dànno il piano di equazioni

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad ay_1 - y_2 = 0$$

cioè il piano $A_3A'_3A'$ rispondente nella $V_3^{\nu+m}$ all' origine A_3 del ramo, come dovevasi verificare. Si ha perciò:

II) *La ridotta di grado* $\nu' + 1$ (*con* $\nu' > 1$) *della falda* (85), *di equazioni* (88) *o* (88') *è costituita da* ∞^1 *piani generatori di una* W_3 *dell'* $S_4 = S'_2\, A_3\, A$.

Il piano $A_3A'_3A'$, *rispondente all' origine* A_3 *del ramo si ha per* $\mu = O$. *Tale ridotta è la prima ridotta tridimensionale della falda che non coincida con l'* $S_3 = A_3\, A'_3\, A\, A'$. *E secuta dal piano* S_2 (x_i) *nella retta* $A_3\, A$, *tangente al ramo, in cui il piano generatore* (88') *rispondente al valore* μ *seca il punto di coordinate* $(\mu,\, a\mu,\, 1)$. *E secata dal piano* S'_2 (y_i) *nell' inviluppo di classe* $\nu' + 1$ *avente per equazione la terza delle* (88'). *Il piano generatore uscente dal punto* $(\mu,\, a\mu,\, 1)$ *di* S_2 *vi seca la retta rispondente allo stesso valore* μ. *Per la* W_3 *il piano* S'_2 *risulta multiplo con la multiplicità* $\nu'+1$. *L'ordine della* W_3 *è* $\nu + 2$.

Questa proprietà si dimostra secando la W_3 con un S_4 passante per S'_2, e si otterrà come ulteriore intersezione il solo piano generatore uscente dal punto in cui detto S_4 seca la retta A_3A di S_2.

III) *La* $V_3^{\nu+m}$ *ha in comune con la* W_3 ν' *piani generatori, rispondenti all' origine* A_3 *e ad altri* $\nu' - 1$ *punti successivi, posti nella retta* $A_3\, A$ *tangente al ramo in* A_3, *e tutti appartenenti all'* S_3 *congiungente* $A_3\, A$ *con* $A'_3\, A$.

17. — *Le falde tridimensionali rispondenti ai rami superlineari.*

Riprendiamo le equazioni (31) della falda tridimensionale di S_5 rispondenti al ramo di S_2 di equazioni (80), nel caso che questo ramo sia *superlineare*, cioè $\nu > 1$. In questo caso, per la proprietà II) del n° 15, la falda ha sempre una seconda origine unidimensionale nella retta $A_3A'_3$, generatrice della rigata $V_2^{2\nu}$, rispondente al punto A_3 origine del ramo. (La prima origine della falda è sempre il punto A'_3).

Dalle (81) risulta che per avere una ridotta [dopo quella di grado 1 che dà la retta $A_3\, A'_3$ seconda origine detta falda] che non dia questa retta occorre considerare la ridotta di grado ν. Questa ridotta ha l' equazioni:

$$(89')\quad \begin{cases} x_1 = O\,, & x_2 = O\,, & x_3 = \lambda \\ y_1 = \mu^\nu + \nu\rho\mu^{\nu-1}\,, & y_2 = a\mu^\nu + \nu a\rho\mu^{\nu-1}\,, & y_3 = 1 \end{cases}$$

che equivalgono alle tre equazioni

$$(89')\qquad x_1 = O\ ,\quad x_2 = O\ ,\quad ay_1 - y_2 = O$$

rappresentanti il piano $A_3\, A'_3\, A'$, cioè il piano generatore della $V_3^{\nu+m}$ rispondente all' origine A_3 del ramo. Sicchè:

I) *La falda tridimensionale rispondente al ramo superlineare* (80) *di ordine* $v > 1$ *ha tre origini: il punto* A'_3. *la retta* $A_3A'_3$ *ed il piano* $A'_3A'_3A'$, *dati: il punto* A'_3 *dalla ridotta di grado zero; la retta* $A_3 A'_3$ *dalle ridotte di gradi* $1, 2, \ldots, v-1$; *il piano* $A_3A'_3A'$ *dalla ridotta di grado* v.

La ridotta successiva di grado $v+1$ è data da:

$$(90) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda, & x_2 = a\lambda\mu^{v}, & x_3 = \lambda \\ y_1 = \mu^{v} + v\rho\mu^{v-1} & y_2 = a\mu^{v} + va\rho\mu^{v-1} & y_3 = 1 \end{cases}$$

che equivalgono alle due equazioni:

$$(90') \qquad ax_1 - x_2 = O \quad , \quad ay_1 - y_2 = O$$

rappresentanti l' $S_3 = A_3AA'_3A'$ congiungente la tangente A_3A al ramo con la sua omologa in S'_2 nella proiettività (5). Questo spazio sarà lo spazio congiungente il piano $A_3A'_3A'$ ed il piano generatore successivo $P_1A'_3A'$, *nel caso che* P_1, punto di A_3A infinitamente vicino ad A_1 *sia semplice* per il ramo, cioè sia la prima classe $v' = 1$. Nel caso invece che sia $v' = 1$ tale S_3, dato dalla ridotta di grado $v+1$, risulterà coincidente con le successive ridotte di grado $v+2 \ldots, v+v'-1$, perchè *la prima ridotta, dopo quella di grado* $v+1$, *distinta da detto* S_3, *è quella di grado* $v+v'$, *data da:*

$$(91) \quad \begin{cases} x_1 = \lambda\mu^{v}, & x_2 = a\lambda\mu^{v} & , \; x_3 = \lambda \\ y_1 = \mu^{v} + v\rho\mu^{v-1} & y_2 = a\mu^{v} + va\rho\mu^{v-1} + b\mu^{v+v'} + (v+v')\, b\rho\mu^{v+v'-1} & , \; y_3 = 1 \end{cases}$$

Se (91) rappresentano una varietà W_3 nell' iperpiano S_4 di equazione $ax_1 - x_2 = O$, cioè nell' iperpiano $S_4 = S'_2A_3A'$. Si ha perciò:

II) *Le ridotte della falda* (81) *di gradi* $v, v+1, v+2, \ldots, v+v'-1$ (*e quindi una sola se è* $v'=1$) *dànno tutte l'* $S_3 = A_3AA'_3A'$.

Quella di grado $v+v'$ *dà la* W_3 *di equazioni* (91), *dell'* $S_4 = S'_2A_3A$.

Si noti ora che *tale varietà* W_3 *è costituita da* ∞^1 *piani generatori* che si ottengono fissando il parametro μ e facendo variare i due parametri λ e ρ. *Un tale piano si ottiene congiungendo i tre punti;*

$$(92) \quad \begin{cases} M\,(\mu^{v}, & O, & a\mu^{v}, & O, 1, & O) \\ N'\,(O, & \mu^{v}, & O, & a\varkappa^{v} + b\mu^{v+v'}. & O, 1) \\ Q'\,(O, & v\mu^{v-1} & O, & va\mu^{v-1} + (v+v')\, b\mu^{v+v'-1}, & O, & O) \end{cases}$$

dato che le (91) si ottengono combinando linearmente le coordinate di M N′ e Q′ secondo i numeri λ, 1, ρ.

Si osservi ora che il punto M al variare di μ descrive la retta A_3A di S_2 di equazioni $a x_1 - x_2 = O$, tangente al ramo nell' origine A_3, data dalla ridotta di grado v del ramo stesso (80) di equazioni :

$$(93) \qquad x_1 = \mu^v \quad , \quad x_2 = a\mu^v \quad , \quad x_3 = 1 .$$

Il punto N′ descrive in S'_2 la curva (omologa nella proiettività (5) della ridotta di grado $v + v'$ del ramo (80)) di equazioni:

$$(94) \qquad y_1 = \mu^v \quad , \quad y_2 = a\mu^v + b\mu^{v+v'} \quad , \quad y_3 = 1.$$

Il punto Q′ ha per coordinate funzioni di μ) le derivate delle coordinate di N′. Ne segue che la retta $t' =$ N′ Q′ è la tangente nel punto N′ alla curva di equazioni parametriche (94) descritta da N′.

Si noti pure esplicitamente che, *comunque il punto variabile nel ramo superlineare dato si fa tendere all' origine del ramo, facendo tendere comunque* μ *a zero, il piano* MN′ Q′, *della* W_3 *rispondente alla ridotta di grado* v + v′, *di equazioni* (91), *tende al piano* A_3 A'_3 A′ *che risponde all'origine del ramo.*

INDICE

Sul problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$

Nota del dott. **Carlo Ciliberto**
presentata dal socio ordinario **Carlo Miranda**

(Adunanza del dì 5 novembre 1955)

Sunto. – Si apporta un interessante complemento ad un risultato stabilito dall'A. in un precedente lavoro.

1. In un recente lavoro [1]) ho dimostrato che nel rettangolo $R = [0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1]$ il problema:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} s = f(x, y, z, p, q) \,, \\ z(0, y) = z(x, 0) = 0 \,, \end{cases}$$

ammette soluzione, se si fanno le seguenti ipotesi:

a) $f(x, y, z, v, w)$ sia una funzione definita nello strato

$$S : (x, y) \in R \,, \qquad |z| \,,\ |v| \,,\ |w| < \infty \,,$$

ivi continua e tale da verificare la limitazione:

$$\text{(2)} \qquad |f(x, y, z, v, w)| \leqq M_1' \, |z| + M_2 \,,$$

con M_1' e M_2 costanti non negative di cui la prima $< 1/2$.

b) per ogni fissato numero positivo N esistono due funzioni $\omega(u)$ e $g(x, y)$ per le quali risulti:

$$f(x, y, z, v_2, w) - f(x, y, z, v_1, w) \leqq g(x, y)\, \omega(v_2 - v_1) \,,$$

nello strato S e per v_1 e v_2 appartenenti all'intervallo $(-N, N)$ e tali che sia $v_2 > v_1$, dove $\omega(u)$ è una funzione definita e continua per $u \geqq 0$, tale che $\omega(0) = 0$, $\omega(u) > 0$ per $u > 0$, e

$$\lim_{\mu \to +0} \int_{\mu}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty \qquad 0 < u_0 \,,$$

---

[1]) Ciliberto C., *Il problema di Darboux per una equazione di tipo iperbolico in due variabili.* Ricerche di Matematica, vol. IV, pp. 15-29. Napoli, 1955.

mentre $g(x, y)$ è una funzione definita in R, non inferiore ad 1, che come funzione di y è sommabile nell'intervallo (0, 1), ed è tale da verificare la limitazione:

$$\int_0^1 g(x, y)\, dy \leq L ,$$

essendo L una costante indipendente da x;

c) $f(x, y, z, v, w)$ soddisfi anche ad un qualsiasi gruppo di condizioni tali da assicurare il sussistere del teorema di unicità per il problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = f[x, y, z(x, y), v(x, y), w(x, y)] , \\ w(0, y) = 0 , \end{cases}$$

comunque si assegnino le funzioni $z(x, y)$ e $v(x, y)$ definite e continue in R.

Il risultato enunciato è, invero, assicurato dal seguente [2]:

TEOREMA I. — *Se* $f(x, y, z, v, w)$ *è una funzione per la quale valgono le ipotesi* a), b) *e* c), *allora esiste una funzione* $z(x, y)$ *definita e continua in* R *con le sue derivate parziali* $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$, $z_{xy}(x, y)$ *soluzione del problema* (1).

Scopo della presente nota è quello di mostrare che il teorema I vale ancora se alla limitazione (2), contenuta nell'ipotesi a), se ne sostituisce un'altra meno restrittiva.

2. Onde dimostrare quanto propostoci ci occorre fare la seguente ipotesi:

a') $f(x, y, z, v, w)$ sia una funzione definita nello strato S, ivi continua e tale da verificare la limitazione:

$$(3) \qquad |f(x, y, z, v, w)| \leq A\left(|z| + |v| + |w|\right) + B ,$$

con A e B costanti, di cui la prima positiva e $< A_0$ e la seconda non negativa, dove A_0 è la radice positiva, certamente esistente, dell'equazione:

$$e^{2t} + e^{t} - 1 = t .$$

Dimostriamo, allora, che vale il seguente:

TEOREMA II. — *Se* $f(x, y, z, v, w)$ *è una funzione per la quale valgono le ipotesi* a'), b) *e* c), *allora esiste una funzione* $z(x, y)$ *definita*

[2]) Cfr. loco cit. in [1]), p. 28, Osservazione 2ª.

e continua in R *con le sue derivate parziali* $z_x(x, y)$, $z_y(x, y)$, $z_{xy}(x, y)$ *soluzione del problema* (1).

La dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella svolta nel caso del teorema I, perciò ci è comodo riprenderla per un momento.

Indicato con Σ lo spazio delle funzioni $z(x, y)$ definite e continue in R insieme alle loro derivate parziali z_x, z_y e z_{xy} e tali che sia $z(0, y) = z(x, 0) = 0$, normalizzato con la posizione:

$$\| z \| = max_R \, | z | + max_R \, | z_{xy} | ,$$

abbiamo definito una trasformazione funzionale al seguente modo.

Assegnata una funzione $z(x, y)$ di Σ, il problema:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = f[x, y, z(x, y), v(x, y), q(x, y)] & \text{in R,} \\ v(x, 0) = 0, \end{cases}$$

ammette, in base all' ipotesi b), soluzione unica. Ottenuta tale soluzione $v(x, y)$, abbiamo considerato il problema:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = f[x, y, z(x, y), v(x, y), w(x, y)] & \text{in R,} \\ w(0, y) = 0, \end{cases}$$

che anche ammette soluzione unica, in base all' ipotesi c). Ottenuta tale soluzione $w(x, y)$ e posto:

$$(6) \qquad z'(x, y) = \int_0^y w(x, t)\, dt ,$$

abbiamo considerato la trasformazione funzionale, definita in Σ, che viene a porsi fra ogni $z(x, y)$ e la $z'(x, y)$ data dalla (6), allorchè $z(x, y)$ varia in Σ. Tale trasformazione abbiamo indicato con

$$(7) \qquad z' = \mathrm{T}(z).$$

Abbiamo poi rilevato che il teorema di esistenza per il problema (1) si muta in quello equivalente dell' esistenza di almeno un punto unito nella trasformazione (7). A tale uopo abbiamo considerato l' insieme I_2 di Σ, definito dalla condizione:

$$(8) \qquad \| z \| \leqq \mathrm{H} ,$$

con H costante fissata e $\geqq \frac{2\,M_2}{1-2\,M_1}$, e abbiamo dimostrato che la (7) trasforma I_2 in una sua parte e inoltre che essa è ivi completamente continua. Dopo di che, tenuto conto che I_2 è chiuso e convesso, l'esistenza del punto unito nella (7) è assicurata dal teorema di BROUWER.

Ora nel caso del teorema II il ragionamento è perfettamente lo stesso, soltanto che bisognerà prendere a considerare l'insieme J definito ancora da una limitazione del tipo (8), però con

$$H \geqq \frac{D}{1-C}, \tag{9}$$

avendo posto:

$$C = e^{A}[(1+A)\,e^{A}-1],$$

$$D = \frac{B\,e^{A}}{A}\,(e^{A}-1+A\,e^{A}),$$

e dove, essendo $0 < A < A_0$, è $1-C>0$.

Per dimostrare che la (7) è completamente continua cominceremo a provare che essa trasforma l'insieme J in una sua parte, cioè che è:

$$\| z' \| \leqq H, \tag{10}$$

dopo di che il ragionamento prosegue e termina come nel caso del teorema I.

Invero la (10), tenute presenti la (8) e la (9), è conseguenza immediata della relazione:

$$\| z' \| \leqq C\,\| z \| + D, \tag{11}$$

di cui ora proveremo la validità.

Tenuto presente che è;

$$\| z' \| = max_R\,|\, z' \,| + max_R\,|\, w_x \,|, \tag{12}$$

nonchè la (6), per verificare che vale la (11), occorrerà provare che è possibile maggiorare $|\,v\,|$ e $|\,w\,|$ con quantità che dipendono linearmente da $\| z \|$.

Procediamo anzitutto per $|\,v\,|$. Dal sistema differenziale (4) e in base alla (3) abbiamo:

$$\begin{cases} \left|\dfrac{\partial v}{\partial y}\right| \leqq A\,|\,v\,| + A\,\| z \| + B, \\ v\,(x,0) = 0, \end{cases}$$

da cui:

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial |v|}{\partial y} - A\,|v| \leqq A\,\|z\| + B\,, \\ v(x, 0) = 0\,, \end{cases}$$

Ora moltiplicando primo e secondo membro della diseguaglianza del sistema (13) per e^{-Ay} e integrando rispetto ad y nell'intervallo $(0, y)$ abbiamo:

$$|v| \leqq \frac{A\,\|z\| + B}{A}\,(e^{Ay} - 1)\,,$$

da cui:

$$(14) \qquad |v| \leqq \frac{A\,\|z\| + B}{A}\,(e^{A} - 1).$$

Dal sistema differenziale (5), in base alla (3) e alla (14), abbiamo:

$$(15) \qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial w}{\partial x}\right| \leqq A\,|w| + (A\,\|z\| + B)\,e^{A}\,, \\ w(0, y) = 0. \end{cases}$$

E con considerazioni analoghe a quelle svolte per il caso di $|v|$ si vede che le funzioni w che soddisfano il sistema (15) sono tali da aversi:

$$(16) \qquad |w| \leqq \frac{A\,\|z\| + B}{A}\,e^{A}\,(e^{A} - 1).$$

Orbene dalla (12), tenuto conto delle (6), (3), (14) e (16), abbiamo:

$$\|z'\| \leqq \frac{A\,\|z\| + B}{A}\,e^{A}\,(e^{A} - 1) +$$

$$+ A \left| \|z\| + \frac{A\,\|z\| + B}{A}\,(e^{A} - 1) + \frac{A\,\|z\| + B}{A}\,e^{A}\,(e^{A} - 1) \right| + B,$$

da cui con facili calcoli si perviene alla (11).

Determinazioni di ascensione retta del pianeta Saturno (anno 1955)

Nota del dott. **Elio Fichera**, *presentata dal socio* **L. Carnera**

(Adunanza del dì 5 novembre 1955)

Sunto. — Si espongono i risultati delle osservazioni meridiane di Saturno, eseguite presso l'Osservatorio Astronomico di Capodimonte Napoli nel 1955. Si premette uno studio delle costanti strumentali, in modo da poter determinare le correzioni da apportare nelle riduzioni delle osservazioni.

Ineguaglianza dei perni. — Lo studio della ineguaglianza dei perni, con le conseguenti variazioni in funzione della distanza zenitale, è stato eseguito, per lo strumento universale Bamberg (apert. ob. mm. 90 f=cm 91), seguendo il metodo della inclinazione.

Questo metodo, concettualmente semplice richiede dal lato pratico molti accorgimenti per fare in modo che i risultati ottenuti siano attendibili.

A tale scopo sono state eseguite dieci serie di osservazioni, ciascuna comprendente nove misure corrispondenti a nove diverse distanze zenitali distanziate di $\frac{1}{8}$ 180° = 22°.5, partendo dal valore di — 90° (cannocchiale orizzontale con obiettivo rivolto a sinistra di chi guarda l'oculare, a + 90° (cannocchiale a destra) essendo possibile solo la determinazione in questo intervallo, che del resto è quello che si usa durante le osservazioni.

Le misure sono state eseguite in prima serata, precisamente un'ora dopo il tramonto, e dopo aver avuto cura di aprire la cupola molto tempo prima in modo da lavorare nelle migliori condizioni di stabilizzazione termica.

Alla bolla della livella a cavalletto è stata data sempre una lunghezza variabile da 22 e 25 parti, in modo da sfruttare al massimo la sensibilità di questa.

Ogni lettura degli estremi veniva eseguita dieci volte, ciascuna a distanza di due minuti primi di tempo, e ciò per diminuire gli errori di apprezzamento nelle letture e per evitare quelli dovuti alla vibrazione del liquido della livella. Inoltre si è regolata l'inclinazione dello strumento in modo che la bolla si trovasse sempre nella parte centrale della livella; e ciò perchè proprio nella parte centrale è difficile l'accumularsi sulla fiala contenente il liquido delle incrostazioni dovute all'impurità del medesimo.

Infine per constatare se il piano dei cuscinetti era normale alle gambe della livella, si è rotata questa parallelamente all' asse dei cuscinetti di angoli variabili, in modo da poter mettere in evidenza le eventuali oscillazioni della bolla ed eliminarli il più possibile.

Si è preferito usare questo metodo [1]), piuttosto che il metodo dei rivelatori elettronici [2]), perchè quest' ultimi, pur dando dei risultati infinitamente più precisi, sono del tutto inutili in pratica: poichè essendo, durante le osservazioni, le misure della inclinazione dello strumento dedotte esclusivamente con la livella a cavalletto, dobbiamo per forza restare, per avere delle correzioni utilizzabili, nei limiti di precisione consentiti dalla sensibilità della bolla.

Nella tabella che segue si riportano i dati ottenuti; con ω^p si è indicato il valore della ineguaglianza dei perni, espresso in parti di graduazione della livella, e dato dalla ben nota relazione:

$$\omega^p = \frac{1}{4}\left(I_e - I_w\right)$$

nelle due ultime righe sono riportati gli errori medi di una osservazione μ e gli errori medi delle medie μ_m.

Per misure eseguite alla stessa distanza zenitale si ottiene quindi in media come errore di un valore:

$$\mu = \pm\ 0^p.049 = \pm\ 0^s.0009\ ,$$

essendo il valore angolare di una parte della livella dell'asse orizzontale:

$$\varphi = 0^s.01894\ ^{3)}\ ,$$

e quindi come errore medio della media dei dieci valori:

$$\mu_m = \pm\ 0^p.016 = \pm\ 0^s.004$$

Dai confronti tra i singoli valori medi ottenuti alle diverse distanze zenitali si deduce:

$$\bar{\omega} = -\ 2^p.432 = -\ 0^s.0461$$

[1]) Silva, *Lo strumento universale Bamberg,* Venezia, 1911, pag. 1403-1405.

[2]) Martinez, Meccanica di precisione, Hoepli, Milano, pag. 243-246.

[3]) Determinazione eseguita da Guerrieri' *Contributo Astronomico n. 26 dell' Osservatorio Astr.* — Capodimonte, Napoli,

TABELLA I

N°	−90°.0	−67°.5	−45°.0	−22°.5	0°	+22°.5	+45°.0	+67°.5	+90°.0
1	−2ᵖ.36	−2ᵖ.34	−2ᵖ.43	−2ᵖ.48	−2ᵖ.51	−2ᵖ.30	−2ᵖ.59	−2ᵖ.50	−2ᵖ.45
2	.49	.26	.51	.44	.50	.27	.41	.44	.39
3	.45	.27	.59	.49	.46	.25	.52	.48	.46
4	.53	.36	.48	.34	.36	.30	.49	.41	.53
5	.52	.27	.50	.49	.46	.37	.49	.46	.49
6	.37	.30	.57	.44	.39	.30	.58	.45	.46
7	.44	.31	.51	.47	.42	.26	.59	.53	.50
8	.46	.35	.42	.38	.50	.29	.47	.46	.52
9	.52	.26	.46	.49	.48	.32	.50	.41	.46
10	.45	.27	.49	.50	.52	.31	.42	.40	.36
M	−2ᵖ.459	−2ᵖ.299	−2ᵖ.496	−2ᵖ.452	−2ᵖ.460	−2ᵖ.297	−2ᵖ.506	−2ᵖ.454	−2ᵖ.462
μ	± 0.059	± 0.040	± 0.052	± 0.054	± 0.054	± 0.034	+ 0.055	± 0.042	± 0.054
μ_m	± 0.019	± 0.013	± 0.016	± 0.017	± 0.017	± 0.011	+ 0.017	± 0.013	± 0.017

e dagli scostamenti delle singole medie di ω'', alle diverse distanze zenitali, da ω si ha come errore medio di una di quelle medie:

$$\mu = \pm\ 0''.077 = \pm\ 0^s.0015$$

e come errore medio di $\bar{\omega}$:

$$\mu_m = \pm\ 0^p.037 = \pm\ 0^s.0008$$

Questo dimostra che le divergenze tra i singoli valori di ω dipendono anche da effettive variazioni dovute alla ineguaglianza dei perni al variare della distanza zenitale.

Essendo, infine, la distanza tra i due perni:

$$L = 602^{mm}.5$$

si avrà dalla ben nota relazione, dove ω è espresso in secondi d'arco:

$$R_{ill.} - R_{oc.} = \frac{\omega\ L}{\sqrt{2}}\ sen.\ 1'' = -\ 1^{\mu}.39$$

cioè: *il raggio del perno situato dalla parte dell' oculare è in media più grande di* $1^{\mu}.39$ *del raggio del perno posto dalla parte del dispositivo di illuminazione.*

Nella tabella che segue si riporta un quadro riassuntivo dei risultati:

TABELLA 11

z	ω^p	ω^s	ω''	$R_{ill.} - R_{oc.}$
—90°.0	—2^p.459	—0^s.0466	—0''.6990	—1$^{\mu}$.429
—67°.5	299	0436	6540	337
—45°.0	496	0473	7095	451
—22°.5	452	0464	6960	423
0°.0	460	0466	6990	429
22°.5	297	0435	6525	334
45°.0	506	0475	7125	457
67°.5	454	0465	6975	426
90°.0	462	0466	6990	429

Micrometro impersonale. — Per poter determinare il semicontatto del micrometro impersonale, è stato necessario prima calcolare il passo della vite micrometrica. Per quest' ultima determinazione si ci è serviti delle stesse stelle adoperate per *Saturno*, le cui posizioni medie sono state tolte dall' *Apparent places of fundamental stars 1955 (FK3).*

Il metodo usato è quello comune delle distanze filari.

Nella tabella che segue si riportano i risultati della determinazione; p indica il peso di ciascuna determinazione (cioè in quante serate è stata osservata la stessa stella), $csec\ \delta$ la correzione da apportare ad ogni stella per il semicontatto del micrometro; essendo l' errore di collimazione residuo che ne deriva:

$$c = 0^{p}.35 = 0^{s}.02650$$

Da ciò si deduce che:

$$R = 7^{s}.57083 \pm 0^{s}.00477$$

ed essendo una rivoluzione della vite divisa in un cento parti, una parte misurerà:

$$P = 0^{s}.07571$$

da dove si deduce la correzione per l' errore di collimazione residuo dovuto alla semilarghezza dei contatti, che è stato riportato sopra.

Durante l' osservazione di *Saturno*, si è notato che il filo mobile della vite micrometrica copriva completamente la parte oscura del pianeta compresa tra il bordo interno dell' ultimo anello e il lembo del disco planetario.

Pertanto per metterci nelle stesse condizioni di osservazione delle stelle (osservando queste mettendo sopra al dischetto stellare il filo mobile) o meglio per ridurre l' osservazione *al filo centrale teorico*, bisognerebbe apportare la correzione dovuta al semispessore del filo micrometrico.

Essendo [1]) la distanza dal centro del pianeta al bordo interno dell'ultimo anello uguale a circa 1.200 volte il raggio equatoriale di *Saturno*, la correzione da apportare, per ridurre le misure al filo centrale teorico sarà:

$$A^{s} = 0.100\ a^{s}$$

[1]) Newcomb-Engelmanns, *Populäre Astronomie*, Leipzig, 1921, pag. 409-423.

TABELLA III

STELLA	α_{1955}			$\cos\delta$	R	p	$c \sec\delta$
20 Canum Ven.	13^h	15^m	$31^s,606$	0,75700	$7^s,60988$	3	$+0^s_3035$
23 Canum Ven.		18	18,065	76173	58397	3	035
2493 Canum Ven.		26	13,922	85370	56431	2	031
2017 Canum Ven.		33	19,221	71427	57022	6	037
η Urs. Maj.		45	46,127	64901	54271	6	041
2411 Canm Ven.		54	10,620	84573	56251	9	031
11 Bootis		59	08,008	88620	58875	5	030
A Bootis	14	16	05,625	81191	62891	5	033
ρ Bootis		29	53,374	86104	57903	8	031
σ Bootis		32	43,215	86661	59534	11	031
33 Bootis		37	09,684	71202	55.84	15	037
2480 Bootis		43	20,677	83899	56794	13	032
2152 Bootis		47	20,645	78801	55239	13	034
47 Bootis	15	03	56,314	66501	58230	7	040
ν^1 Bootis		29	18,661	75490	55628	7	035
Φ Bootis		36	12,519	76041	56727	8	035
$\varkappa$ Cor. Bor.		49	32,072	81106	54346	5	033
τ Cor Bor.	16	07	19,434	80282	59048	1	033
256 Cephei	2^h	09^m	$45^s,670$	0,99327	$7^s,57098$	8	$-0,229$
402 Cephei	3	21	32,270	99580	57104	7	290

dove a^s è il semidiametro equatoriale di *Saturno*, espresso in secondi di tempo.

Dall' *American Ephemeris 1955* si ha il semidiametro polare b, ed essendo lo schiacciamento di *Saturno* [5]:

$$s = 1/95 = 0.1053$$

si ricava il semidiametro polare del pianeta:

$$a^s = 1.1053 \; b^s$$

da cui si ottiene la correzione complessiva K^s, da apportare alle *AR* osservate, per ridurre l' osservazione al centro del disco planetario:

$$K^s = A^s + a^s = 1{,}216 \cdot b^s \quad .$$

Si è trovato in tal modo per il semispessore del filo micrometrico il valore:

$$A = 0^s.0601$$

Stato strumentale; AR del pianeta Saturno. — Per poter determinare le ascensioni rette del pianeta *Saturno*, si sono eseguite n° 18 serate di osservazione, osservando in media 10 stelle per sera tra cui una circumpolare.

La Tab. IV dà i valori dell' inclinazione media i_m per ogni serata, assieme ai vaiori dell' azimut strumentale a e allo stato del *Riefler I°* senza apportare, ai tempi letti sulla striscia cronografica, alcuna correzione; e poi i valori a_1 e $(\Delta \; t_m)_1$ ottenuti correggendo i tempi suddetti della quantità $c \sec \delta$ riportate nell' ultima colonna della tabella III.

Per *Saturno* si è portato il filo mobile del micrometro tangente al lembo che prima appariva nel campo del cannocchiale, internamente al sistema di anelli, e si è seguito il pianeta sino a circa metà campo, e invertito lo strumento si è atteso che lo stesso lembo entrasse in contatto con il filo mobile, ripetendo l' operazione.

Il valore dell' ascensione retta calcolata è stata dedotto servendosi dell' *American Aphemeris 1955*, tenendo conto delle differenze *prime e seconde*.

Nella Tab. V sono riportate le conclusioni; le quantità senza alcun indice si riferiscono a quei valori ottenuti senza apportare alcuna correzione, quelle con l' indice 1 sono state ottenute correggendo solo per il semispessore del filo micrometrico, infine quelle con indice 2 sono state

---

[5]) *Connaissance des Temps*, 1955, pag. XXIII.

TABELLA IV

n°	DATA		i_m	a	Δt_m	a_1	$(\Delta t_m)_1$
1	1955 giugno	2	$-0^s.044$	$-0^s.505$	$+13^s,842$	$-0^s.543$	$+13^s.883$
2		3	013	559	901	594	938
3		6	$+0.114$	484	703	521	751
4		7	057	516	747	553	783
5		8	107	587	715	625	751
6		10	080	532	767	567	803
7		15	095	570	508	597	544
8		16	115	480	434	515	477
9		17	036	549	436	586	473
10		19	104	553	345	590	382
11		21	133	457	406	494	441
12		27	095	403	417	439	436
13		28	080	433	342	470	383
14		29	084	667	327	703	364
15		30	124	562	253	598	289
16	luglio	1	114	553	187	589	222
17		3	114	441	170	477	205
18		4	118	329	098	365	132

ottenute apportando oltre alla correzione precedente anche quella dovuta alla semilarghezza dei contatti.

La serata del 15 giugno era molto nuvolosa; l' immagine di *Saturno* molto oscillante, pertanto invece di considerare nel calcolo di riduzione solo 10 appulsi, se ne sono considerati 20. La serata del 16 giugno si è dovuta eliminare dato che l' immagine di *Saturno* appariva ad intermittenze. La serata del 28 presentava una nuvolosità di 7/10, molto contrastata l' osservazione ad Est di *Saturno*, ottima quella ad Ovest:

Si può concludere quindi come media degli scarti $(O-C)_2$ il valore:

$$(O - C) = -0^s.035 \pm 0^s.0059 \; e.\, m.$$

TABELLA V

DATA		α_c			(α_0)	$(\alpha_0)_1$	$(\alpha_0)_2$	O — C	$(O - C)_1$	$(O - C)_2$
giugno	2.888	14^h	57^m	$32^s.796$	$32^s.687$	$32^s.747$	$32^s.756$	$-0^s.082$	$-0^s.022$	$-0^s.013$
	3.885			17 .573	17 .473	17 .533	17 .540	100	040	033
	6.876		56	33 .308	33 .226	33 .286	33 .302	082	022	006
	7.873			19 .033	18 .896	18 .956	18 .966	137	077	067
	8.870			04 .957	04 .822	04 .882	04 .886	135	075	071
	10.864		55	37 .603	37 .515	37 .575	37 .581	088	028	022
	15.850			33 .784	33 .714	33 .774	33 .784	070	010	000
	17.844		54	10 .247	10 .140	10 .200	10 .205	107	047	042
	19.839		53	47 .880	47 .765	47 .815	47 .820	115	065	060
	21.833			26 .792	26 .711	26 .771	26 .775	081	021	017
	27.816		52	31 .308	31 .213	31 .273	31 .262	095	035	046
	28.813			23 .239	23 .171	23 .231	23 .241	068	008	+0 .002
	29.810			15 .527	15 .375	15 .435	15 .441	152	092	—0 .086
	30.807			08 .163	08 .077	08 .137	08 .143	086	026	020
luglio	1.805			01 .140	01 .026	01 .086	01 .090	114	054	050
	3.799		51	48 .170	48 .077	48 .137	48 .142	093	033	028
	4.796			42 .226	42 .127	42 .187	42 .190	099	039	036

Sull' habitus cristallino dei solidi che prendono origine nella reazione fra l' allumina e la soluzione di calce.

Nota dei dott. **Riccardo Sersale** *e* **Liliana Calarese**,
presentata dal socio **G. Malquori**.

(Adunanza del dì 5 novembre 1955)

Sunto. — Allumine ottenute in modo diverso sono state cimentate verso la soluzione satura di calce e, come era da prevedersi, si è notato che la γ-Al_2O_3 e le allumine sub-amorfe provenienti dalla demolizione termica, allo stato solido e a bassa temperatura, di sali di alluminio facilmente decomponibili con il calore, reagiscono con la calce molto più rapidamente dell' idrargillite, della boehmite e dell' α-Al_2O_3.

A seguito dell' attacco prendono origine delle soluzioni instabili dalle quali, a temperatura ordinaria, si separano dei cristalli di abito esagonale, che a loro volta si evolvono verso la forma cubica stabile: l' alluminato tricalcico esaidrato, che si presenta con habitus differente: cubo, icositetraedro, esacisottaedro, rombododecaedro ecc.

Sulla rapidità dell' evoluzione verso le condizioni di stabilità prevedibili sulla scorta del diagramma di stato del sistema: $Al_2O_3-CaO-H_2O$, influiscono favorevolmente: l' alto titolo di CaO della soluzione di contatto e la temperatura elevata.

Non si è invece constatata alcuna azione accelerante determinata dall' aumento del pH della soluzione, ottenuto mediante aggiunta di alcali.

I prodotti tensio-attivi presenti nel sistema in piccole quantità esercitano azione inibitrice nel passaggio dalle forme esagonali metastabili degli alluminati calcici, alla forma cubica, stabile.

E' nota l' influenza che delle sostanze estranee presenti nella soluzione satura dalla quale si vien separando un solido cristallino, esercitano sull' accrescimento orientato, quindi sullo sviluppo morfologico cioè sullo habitus del cristallo finale [1]).

Le variazioni dell' habitus sono attribuite a diversità nella velocità di accrescimento sulle differenti facce, determinata appunto dalle suddette sostanze estranee presenti alla superficie limite delle fasi.

---

[1]) « Crystal Growth », Discussions of the Faraday Society, n° 5 (1949).

Gomer R., e Smith C. S., *Structure and properties of solid surfaces*, Chicago (1953).

Seifert H., *Das Problem der Kristalltracht und seine technische Bedeutung*, Chemie Ingen. Technik *27*; 135 (1955).

E' noto altresì che nelle interazioni fra un solido ed un liquido puro od una soluzione, giuoca non soltanto la natura chimica dei materiali in questione, ma altresì: la struttura reticolare del solido, il suo grado di ordine o di stabilità, la superficie specifica effettiva, lo stato della suddetta superficie, la presenza in soluzione di sostanze estranee, come, ad esempio, dei composti tensio-attivi.

E' evidente che i fattori su ricordati debbano agire sulla velocità dell' accrescimento orientato dei solidi di neoformazione influendo sul loro sviluppo morfologico, e si presume che codesti fenomeni debbano giuocare nel campo dei leganti idraulici in modo che purtroppo è a noi attualmente quasi sconosciuto e nonostante che su codesti aspetti eminenti studiosi abbiano da tempo richiamato l' attenzione degli interessati [2]).

Nel sistema: Al_2O_3 — CaO — H_2O, a causa della lentezza con la quale l' assetto transitorio, instabile, evolve verso condizioni di equilibrio, è ben difficile poter discernere gli equilibri reali dagli apparenti.

E' noto tuttavia che le fasi solide stabili sono (a 20°C.) tre: $3CaO \cdot Al_2O_3 \cdot 6H_2O$ (cubico), $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$ (idrargillite cristallina), $Ca(OH)_2$. Ma accanto alla forma stabile cubica dell' alluminato $C_3A \cdot 6H_2O$ sono note altresì le forme metastabili in lamelle esagonali: $C_2A \cdot 8H_2O$, $C_3A \cdot 12H_2O$, $C_4A \cdot 13H_2O$, ed in lunghi aghi birifrangenti: $C_3A \cdot 18H_2O$ [3]).

Gli alluminati esagonali, metastabili, tendono a formare dei cristalli misti anomali e, lentamente a temperatura ordinaria, a trasformarsi nella fase stabile: $C_3A \cdot 6H_2O$ cubica, tanto più velocemente quanto più elevato è il pH della soluzione di contatto.

L' innalzamento della temperatura accelera altresì l' evoluzione verso a fase cubica. La quale può anch' essa presentarsi con habitus differente: cubi, ottaedri, rombododecaedri, icositetraedri, esacisottaedri e loro combinazioni [4]).

Noi abbiamo voluto seguire, in questa prima nota, lo sviluppo morfologico dei solidi cristallini che prendono origine per reazione fra allumina e soluzione di calce.

Le variabili prese in esame sono le seguenti:

a) — l' origine dell' allumina;

b) — il rapporto molecolare: CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale;

c) — a pari rapporto: CaO/Al_2O_3, l' influenza dell' innalzamento del pH conseguito mediante aggiunta di alcali;

---

[2]) Vedi, ad esempio: LEA F. M., e NURSE R. W., *Problems of crystal growth in building materials*, « Discussions of the Faraday Society », n° 5: «Crystal Growth», 345 (1949).

[3]) BOGUE R. H., *The Chemistry of Portland Cement*, New York (1955).

[4]) KOYANAGI K., *Die Wirkung vom Kalkydrat auf die Hydratation des Tonerdeschmelzzementes*, Zement *22*; 129 (1933).

d) — la temperatura;

e) — la presenza nel sistema: $CaO-Al_2O_3-H_2O$, di agenti tensio attivi di varia natura.

Abbiamo preparato in vario modo e ben individuato nella loro struttura, differenti allumine:

1) — Allumina ottenuta per parziale disidratazione del gelo a bassa temperatura (105° C.).

Il suo spettro di raggi X, mostra le linee caratteristiche della boehmite: $Al_2O_3 \cdot H_2O$ (fig. 1^a). Scaldata fino a completa disidratazione: circa 600° C., dà origine a γ-Al_2O_3, la quale per successivo ulteriore riscaldamento a 1000° C. si trasforma in α-Al_2O_3 fig. 1^b).

2), 3), 4) — Sono delle allumine da ritenersi particolarmente reattive, le quali hanno preso origine dalla demolizione termica a bassa temperatura (350 ÷ 400° C.) di sali di alluminio facilmente decomponibili, quali: il cloruro esaidrato, il nitrato noveidrato ed il formiato basico monoidrato.

Le suddette allumine appariscono amorfe ai raggi X. Sottoposte ad analisi termica, mostrano tutte e tre un forte sviluppo di calore (fig. 2) che si inizia intorno ai 700° C. per l' allumina proveniente dal cloruro ed a temperatura leggermente più alta: 750° C. per le allumine ricavate da formiato e dal nitrato.

Lo sviluppo di calore è dovuto al passaggio dalla struttura instabile, disordinata, derivante dalla demolizione termica a bassa temperatura del sale di partenza, ad una struttura ordinata più stabile.

Il riordinamento avviene nella struttura di k-Al_2O_3 (v. nota [6]) a pag. seguente), per l' allumina proveniente dal cloruro (fig. 3), nella struttura di γ-Al_2O_3 per quelle ricavate dal nitrato (fig. 4) e dal formiato [5]).

Per riscaldamento a 1000° C. tutte le su ricordate allumine passano alla forma definitivamente stabile: l' α-Al_2O_3.

5) — E' dell'allumina Bayer del commercio: $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$. Per disidratazione parziale fornisce boehmite, e verso i 600° C., perduta com-

---

[5]) Stumpf H. C., Russell A. S., Newsome J. W., Tucker C. M., *Thermal Transformations of Aluminas and Alumina Hydrates,* Ind. Engin. Chem., *42*; 1398 (1950).

Thibon H., Charrier J., Tertian R., *Décomposition thermique des hydrates d'alumine,* Bull. Soc. Chim., *18*; 384 (1951).

Prettre M., Imelik B., Blanchin L., Petitjean M., *Zum Bildungsmechanismus adsorbierender und katalytisch wirksamer Aluminiumoxyde,* Zeit. Angew. Chem., *65*; 549 (1953).

Papée D., Tertian R., *Étude de la décomposition thermique de l' hydrargillite et de la constitution de l' alumine activée,* Bull. Soc. Chim., *22*; 983 (1955).

pletamente l'acqua: γ-Al_2O_3, la quale a temperatura più alta — verso i 900° C. — si trasforma in k-Al_2O_3 e successivamente a 1000° C., rapidamente in α-Al_2O_3[6] (fig. 5).

6) — Allumina preparata per decomposizione dell' amalgama di alluminio.

Sottoposta ad analisi röntgenografica non fornisce spettro di righe. Disidratata completamente per riscaldamento a 550÷600° C. si tramuta in: γ-Al_2O_3 e più su, verso i 1000° C., in α-Al_2O_3.

Le allumine preparate nel modo anzidetto si comportano diversamente verso la soluzione di calce in quanto varia da un tipo all' altro non solo la velocità di attacco o di dissoluzione, bensì lo stesso valore della solubilità (comparate alla stessa finezza).

Le curve di solubilità, diverse per ciascuna delle allumine considerate sono evidentemente instabili rispetto a quella stabile, che nel diagramma di stato del sistema: Al_2O_3—CaO—H_2O compete all' idrargillite.

Ripetiamo che, dato che non si tratta di variazioni notevoli della solubilità, l' evoluzione verso il sistema stabile è molto lenta.

A pari titolo di calcé della soluzione di contatto la solubilità dell' allumina dipende dal grado di instabilità, cioè di reattività, del tipo di allumina considerato ed è da prevedersi massima per le allumine sub-amorfe a struttura altamente disordinata, provenienti dalla demolizione termica

---

[6]) *Distanze reticolari ed intensità relative per l'allumina kappa.*

THIBON loc. cit. dÅ	I rel	STUMPF loc. cit. dÅ	I rel	SERSALE e CALARESE dÅ	I rel
4.52	dd	4.52	dd	4.50	dd
3.02	md	3.06	md	3.03	d
2.79	m	2.81	m	2.81	m
2.717	dd	2.72	md	2.72	d
2.563	mf	2.59	mf	2.575	mf
2.445	d	2.43	d	2.42	md
2.31	d	2.34	md	2 33	md
2.273	d	2.28	ddd	2.26	d
2.11	mf	2.125	mf	2.117	mf
1.99	m	2.00	md	1.99	m
1.87	m	1.88	m	1.87	md
1.633	m	1.646	m	1.64	m
1.485	d	1.495	d	1.50	d
1 435	mf	1.440	mf	1.433	mf
1.391	f	1.396	f	1.390	f

d: debole; dd: molto debole; ddd: molto molto debole; md: media debole; m: media; mf: media forte; f: forte.

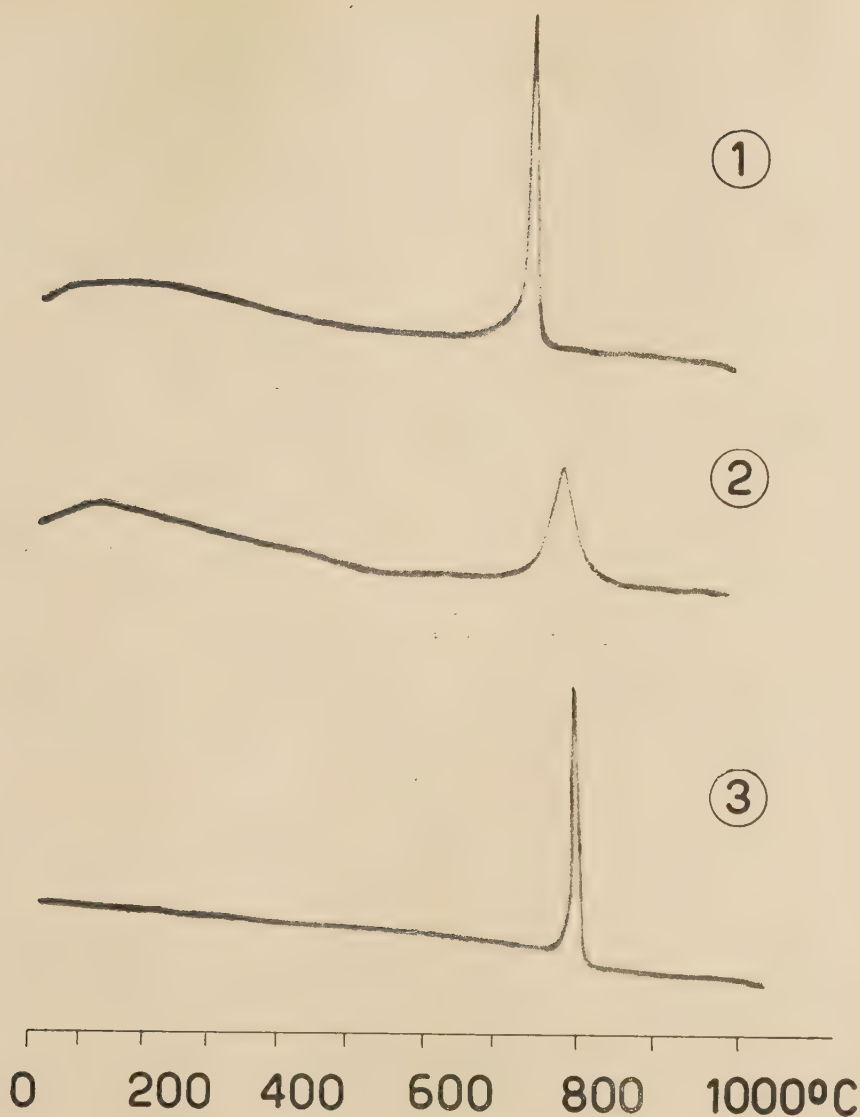



Fig. 2: *Analisi termica differenziale.*

1) Allumina per demolizione termica a bassa temperatura dell'esaidrato del cloruro di alluminio.
2) Allumina per demolizione termica a bassa temperatura del noveidrato del nitrato di alluminio.
3) Allumina per demolizione termica a bassa temperatura del monoidrato del formiato basico di alluminio.

allo stato solido, a bassa temperatura, di sali facilmente decomponibili con il calore.

Iniziatosi l' attacco, il titolo di Al_2O_3 della soluzione aumenterà fino alla saturazione rispetto alla nuova fase solida: l' alluminato calcico idrato, probabilmente in forma metastabile, di habitus esagonale, che lentamente a temperatura ordinaria, e più velocemente con l' aumentare della temperatura, si evolverà verso la forma cubica, stabile e meno solubile.

A seconda dell' allumina di partenza è quindi presumibile che l' alluminato solido instabile si separi allo stato cristallino da soluzioni di titolo di Al_2O_3 diverso da tipo a tipo.

La sperimentazione è stata eseguita con le seguenti modalità:

all' allumina (gr. 2), passata al vaglio di 10.000 maglie / cm^2, ed all'ossido di calcio — in quantità variabile secondo i rapporti molecolari CaO/Al_2O_3 stabiliti — contenuti in bottigliette di vetro di Jena munite di tappo di gomma, sono stati addizionati 250 cc. di acqua distillata priva di CO_2.

Le bottigliette sono state di poi conservate, ed in continua agitazione, in capaci termostati regolati ciascuno alla temperatura scelta per il saggio e cioè: 20°, 50° e 80° C. La regolazione della temperatura oscillava entro i due decimi di grado.

Di quando in quando si prelevava, avendo cura di evitare il più possibile il disturbo della carbonatazione, sia il liquido per la misura del pH, sia il solido per l' osservazione dell' aspetto morfologico dei cristalliti originatisi a seguito della reazione fra l' allumina e la calce della soluzione di contatto.

I risultati ottenuti nel corso della sperimentazione sono riassunti nelle tabelle che seguono.

Si osservi la notevole influenza, già nota, che esercitano: il rapporto: CaO / Al_2O_3 nel sistema iniziale e di conseguenza il titolo di CaO nella soluzione di contatto, nonchè l' innalzarsi della temperatura, sulla scomparsa dei cristalli metastabili in lamine esagonali (v. tab. I).

Nella fig. 6 sono riportati alcuni degli esempi più significativi.

Come è detto in principio, si è voluto osservare l' influenza dell'aumento del pH della soluzione di contatto provocato dall' aggiunta di alcali (NaOH).

I risultati sono riportati nella tab. II, e, contrariamente all' aspettativa, si è notato che la presenza dell' alcali nella soluzione non facilita affatto la transizione dalle forme instabili esagonali degli alluminati, alla forma cubica stabile.

TABELLA I

Allumina ottenuta per demolizione termica di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ a bassa temperatura.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale:	temp. °C.	habitus dei cristalliti: dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	lamelle esagonali pH = 12.01	lamelle esagonali	lamelle esagonali pH = 12.03
0.908	50°	icositetraedri pH = 11.98	icositetraedri	icositetraedri pH = 12.02
0.908	80°	icositetraedri assai ben sviluppati pH = 11 81	idem	idem pH = 11.93
1.81	20°	lamelle esagonali pH = 12.02	lam. esag. e ottaedri	lamel. esag. e ottaedri pH = 12.05
3.63	20°	lamelle esagon. e cubi pH = 12.62	lam. esag. e cubi	lamelle esag. e cubi pH = 12.66
5.45	20°	cubi e rare lamelle esagonali pH = 12.66	cubi	cubi ben sviluppati pH = 12.70
5.45	50°	cubi e geminati cubici di compenetrazione pH = 12.50	idem	idem pH = 12.54
5.45	80°	cubi molto ben svilup. pH = 12.49	cubi molto ben sviluppati	cubi molto ben svil. pH = 12.59

TABELLA II

Allumina ottenuta per demolizione termica di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ a bassa temperatura con aggiunta al sistema di alcali.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale:	temp. °C.	habitus dei cristalliti: dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	rade lamelle esagon. pH = 12.70	lamelle esagonali non ben svilup.	idem pH = 13.10
5.45	20°	rade lamelle esagon. pH = 13.10	idem	cubi e rade lamelle esagonali pH = 13.10

Nella tab. III sono poi indicati i risultati ottenuti addizionando al sistema delle piccole quantità di agenti tensio-attivi.

Le aggiunte sono state contenute entro l' ordine di grandezza dell'im-

TABELLA III

Allumina ottenuta per demolizione termica di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ a bassa temper., con aggiunta al sistema di piccole quantità di agenti tensio-attivi.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale:	Agente tensio-attivo	% *	temp. °C.	habitus dei cristalliti: dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	Igepon T.	0.07	20°		piccole lamelle esagonali	piccole lamelle esagonali pH = 12.03
0.908	Invadina I. F. C.	0.07	20°		piccole lamelle esagonali	piccole lamelle esagonali pH = 12.00
0.908	Leonil S.	0.07	20°		piccole lamelle esagonali	piccole lamelle esagonali pH = 12.04
0.908	Invadina I. F. C.	0.01	80°	icositetraedri	icositetraedri ben sviluppati	idem pH = 11.97
5.45	Darex S. R. D. A.	0.3	20°		piccole lamelle esagonali	piccole lamelle esagonali pH = 12.57
5.45	Igepon T.	0.07	20°		piccole lamelle esagonali	piccole lamelle esagonali pH = 12.47
5.45	Invadina I. F. C.	0.07	20°		lamelle esagonali	lamelle esagonali pH = 12.45
5.45	Leonil S	0.01	20°		piccole lamelle esagonali	piccole lamelle esagonali pH = 12.48
5.45	Leonil S.	0.07	20°		piccole lamelle esagonali	lamelle esagonali pH = 12.46
5.45	Darex S. R. D. A.	0.3	50°	cubi	cubi	cubi pH = 12.36
5.45	Invadina I. F. C.	0.01	80°	cubi	cubi con aggiunte di facce di ottaedro	cubi con aggiunte di facce di ottaedro pH = 12.57

* La percentuale di agente tensio-attivo, espressa in questa colonna, è riferita alla somma dei grammi: $CaO + Al_2O_3$, nel sistema iniziale.

piego di questi materiali come plastificanti ed aeranti del calcestruzzo cementizio.

Si sono adoperati: DAREX S.R.D.A., INVADINA I.F.C., IGEPON T., LEONIL S. composti questi che sono stabili rispetto sia all' idrossido sia ai sali di calcio.

Si noti come la presenza degli agenti tensio-attivi stabilizzi le forme esagonali, metastabili, degli alluminati di calcio. A temperatura ordinaria

TABELLA IV

Allumina ottenuta per demolizione termica di $Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$ a bassa temperatura.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale:	temp. °C.	habitus dei cristalliti		
		dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	lamelle esagonali pH = 12.06	idem	lamelle esag. di maggiori dimensioni pH = 12.13
0.908	50°	icositetraedri assai ben sviluppati pH = 11.81	idem	idem pH = 12.00
0.908	80°	icositetraedri assai ben sviluppati pH = 11.71	idem	idem pH = 11.99
1.81	20°	lamelle esagonali pH = 11.98	idem	idem pH = 12.09
3.63	20°	lamelle esagon. e cubi pH = 12.35	lamelle esagonali, cubi, ottaedri e combinazioni di cubo ed ottaed.	idem pH = 12.65
5.45	20°	lamelle esag. e cubi pH = 12.55	idem	lamelle esagonali e cubi; rari ottaedri e combinazioni di cubo ed ottaedro pH = 12.65
5.45	50°	cubi pH = 12.50	idem	idem pH = 12.54
5.45	80°	cubi pH = 12.55	idem	idem pH = 12.57

non è stato possibile rilevare delle cristallizzazioni cubiche, neanche dopo un anno di contatto (fig. 7).

Nella tab. IV e nella fig. 8 è indicato il comportamento dell' allumina ottenuta a partire dal nitrato noveidrato.

Il comportamento è sostanzialmente analogo a quello osservato per la precedente allumina ricavata per demolizione di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$.

Nella tab. V e nella fig. 9 si riportano le notizie relative al comportamento dell' allumina ricavata a seguito della decomposizione del formiato basico di alluminio.

Si noti che il comportamento è analogo a quello delle allumine pre-

TABELLA V

Allumina ottenuta per demolizione termica a bassa temperatura di AlOH $(HCOO)_2 \cdot H_2O$.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale :	temp. °C	habitus dei cristalliti:		
		dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	lamelle esagonali pH = 12.12	lamelle esagon. di maggiori dimens.	idem pH = 12.19
0.908	50°	piccoli cristalli: esagoni ed ottaedri pH = 11.68	i cristalli non si accrescono	piccoli esagoni ed ottaedri pH = 11.90
1.81	20°	lamelle esagonali pH = 12.08	lamelle esagonali ben sviluppate	lamelle esagonali a contorno netto pH = 12.11
3.63	20°	lamelle esagonali pH = 12.57	lamelle esagonali ben sviluppate	lamelle esagon nette e piccoli ottaedri pH = 12.69
5.45	20°	piccole lamelle esagonali pH = 12.61	idem	piccole lamelle esag. e piccoli ottaedri pH = 12.70
5.45	50°	icositetraedri pH = 12.56	icositetraedri e rombododecaedri	idem pH = 12.60

cedenti, salvo una maggiore lentezza nell' evoluzione verso l' habitus cubico stabile dell' alluminato tricalcico idrato.

La presenza nel sistema del prodotto tensio-attivo: DAREX ritarda, anche in questo caso, la comparsa della fase cubica.

Nella tab. VI e nella fig. 10 è invece indicato il comportamento dell'allumina ricavata per decomposizione dell' amalgama di alluminio.

La reattività di questa allumina è notevole, come appare dalla documentazione riportata in fig. 10.

La presenza di composti tensio-attivi, favorisce anche in questo caso la permanenza delle forme esagonali metastabili degli alluminati calcici, anzi lo stesso attacco dell' allumina per parte della calce sembrerebbe — all' osservazione microscopica – notevolmente ritardato dalle suddette sostanze.

TABELLA VI

Allumina ottenuta per decomposizione dell' amalgama di alluminio.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale:	temp. °C.	habitus dei cristalliti: dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	lamelle esagonali pH = 11.95	icositetraedri assai minuti	idem pH = 12.00
0.908	50°	icositetraedri di differenti dimensioni pH = 11.79	icositetraedri ben sviluppati	idem pH = 11.98
0.908	80°	icositetraedri pH = 11.92	idem	idem pH = 12.03
1.81	20°	icositetraedri assai minuti e lamelle esagonali pH = 11.95	icositetraedri meglio sviluppati e rare lamelle esagonali	icositetraedri pH = 12.15
3.63	20°	cubi pH = 12.39	idem	idem pH = 12.63
5.45	20°	cubi pH = 12.35	idem	idem pH = 12.62
5.45	50°	icositetraedri pH = 12.55	icositetraedri ed associaz. col cubo	cubi pH = 12.70
5.45	80°	icositetraedri pH = 12.58	cubi	idem pH = 12.72

La presenza di alcali (NaOH) nella soluzione di contatto, ostacola la evoluzione del corpo di fondo verso la forma cubica stabile, nei suoi vari habitus, dell' alluminato tricalcico idrato.

Nella tab. VII e nella fig. 11 sono riportati i risultati ricavati con l' allumina Bayer: $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$, cristallina, non disidratata.

Si osservi la maggiore lentezza con la quale procede l' attacco e la solubilizzazione per parte della calce, rispetto a quanto è stato osservato con le allumine saggiate precedentemente.

Nella tab. VIII ed ancora nella fig. 11 sono indicati i risultati ottenuti con γ-Al_2O_3, ricavata disidratando a 600° C. l' allumina Bayer.

La γ-Al_2O_3 è risultata una delle allumine più reattive fra quelle da noi esaminate.

La tab. IX riporta i risultati delle osservazioni ricavate lavorando con allumina ottenuta dal gelo, per essiccamento.

TABELLA VII

Allumina Bayer : $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale:	temp. C.	habitus dei cristalliti: dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	cubetti e rare lamelle esagon. pH = 12.52	cubi e loro combinazioni pH = 12.66
0.908	50°	cubetti e rare lamelle esagon. pH = 12.01	cubi e loro combinazioni pH = 12.09
1.81	20°	cubetti e rare lamelle esagon.. pH = 12.47	cubi e loro combinazioni pH = 12.65
3.63	20°	cubetti e rare lamelle esagon. pH = 12.45	cubi e loro combinazioni pH = 12.66
5.45	20°	cubetti e rare lamelle esagon. pH = 12.50	cubi e loro combinazioni pH = 12.65

Si osservi la lentezza con la quale, a temperatura ordinaria (20° C.), il sistema tende ad evolvere verso l' assetto stabile con a corpo di fondo la fase cubica.

Nella tabella X è indicato il comportamento dell' allumina stabile: α-Al_2O_3.

Da quanto esposto appare evidente che la velocità di dissoluzione nella soluzione di calce, nonchè la stessa solubilità, sono notevolmente influenzate dalle caratteristiche strutturali delle allumine di partenza e risultano tanto più elevate quanto maggiore è il grado di instabilità dei solidi considerati.

Così, mentre l' allumina - γ e le allumine provenienti dalla demolizione termica a bassa temperatura di sali di alluminio facilmente decomponibili, reagiscono abbastanza rapidamente con la soluzione di calce, l' idrargillite, la boehmite e l' α-Al_2O_3 reagiscono di gran lunga più lentamente.

A seguito dell' attacco di codeste allumine si generano delle soluzioni instabili dalle quali, a temperatura ordinaria, si separano più o meno lentamente dei cristalli di abito esagonale che a loro volta sono metastabili rispetto alla forma cubica stabile dell' alluminato tricalcico idrato.

Sulla rapidità dell' evoluzione verso le condizioni di stabilità prevedibili sulla scorta del diagramma di stato del sistema: Al_2O_3—CaO—H_2O, influiscono favorevolmente: l' alto titolo di CaO della soluzione di contatto e la temperatura elevata.

Non si è constatata invece alcuna azione accelerante determinata

TABELLA VIII

γ-Al_2O_3 ottenuta per demolizione termica a 600° C. dell' allumina Bayer.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale:	temp. °C.	habitus dei cristalliti:		
		dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	lamelle esagonali e forme monometriche pH = 12.50	cubi, ottaedri, combinazioni di cubo ed ottaedro e lamelle esagon.	cubi, ottaedri, combinazioni di cubo ed ottaedro pH = 12.64
0.908	50°	rombododecaedri e forme monometr. meno chiare pH = 11.85	idem	idem pH = 12.25
0.908	80°	lamelle esagonali e forme monometr. pH = 12.01	cubi e rombododecaedri	idem pH = 12.11
1.81	20°	cubi ed ottaedri pH = 12.41	cubi, ottaedri, combinazioni di cubo ed ottaedro	idem pH = 12.62
3.63	20°	lamelle esagon. e minute forme monom. pH = 12.51	cubi	minuti icositetraedri e cubi pH = 12.64
5 45	20°	lamelle esagon. e minute forme monom. pH = 12.54	cubi ed icositetraedri	idem pH = 12.65
5.45	50°	icositetraedri non ben sviluppati pH = 12.46	idem	idem pH = 12.60
5.45	80°	icositetraedri non ben sviluppati pH = 12.50	icositetraedri e rombododecaedri	idem pH = 12.62

dall' aumento di alcalinità della soluzione, ottenuto mediante apposita aggiunta di alcali.

I prodotti tensio-attivi da noi introdotti nel sistema, all' incirca nelle stesse proporzioni di quelle in uso nella pratica della plastificazione e dell' aerazione dei calcestruzzi, hanno fornito l'interessante constatazione di una loro azione inibitrice del passaggio dalle forme esagonali metastabili alla forma cubica, stabile.

TABELLA IX

Allumina ricavata dal gelo per parziale disidratazione a 105° C.

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale :	temp. °C.	habitus dei cristalliti:		
		dopo 80 ore	dopo 3 mesi	dopo 1 anno
0.908	20°	lamelle esagonali pH = 11.84	idem	lamelle esagonali meglio sviluppate pH = 12.00
0.908	50°	lamelle esagonali ed icositetraedri pH = 11.50	idem	idem pH = 11.65
1.81	20°	lamelle esagonali pH = 11.98	idem	lamelle esagonali meglio sviluppate pH = 12.11
3.63	20°	lamelle esagonali pH = 12.53	lam. esag. e minuti ottaedri	idem pH = 12.64
5.45	20°	lamelle esagonali pH = 12.58	lamelle esagonali ed assai piccoli ottaedri	idem pH = 12.64
5.45	50°	icositetraedri e rombododecaedri pH = 12.57	icositetraedri	idem pH = 12.65

TABELLA X

α-Al_2O_3 .

Rapporto mol. CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale :	temp. °C.	habitus dei cristalliti:	
		dopo 80 ore	dopo 1 anno
0.908	20°	non si forma specie cristallina pH = 12.29	radi rombododecaedri pH = 12.38
0.908	50°	non si forma specie cristallina pH = 12.35	radi rombododecaedri pH = 12.41
1.81	20°	non si forma specie cristallina pH = 12.37	rade lamelle esagonali e minute forme monometriche pH = 12.46

Napoli, Istituto di Chimica Industriale dell' Università, Luglio 1955.

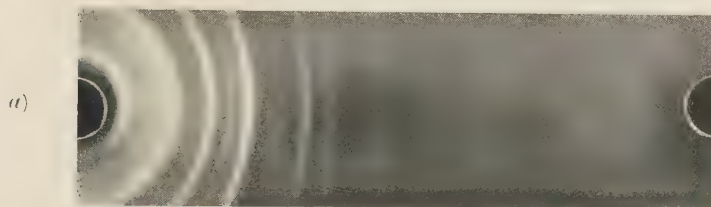



Fig. 1ª: diam. camera mm. 57,3.

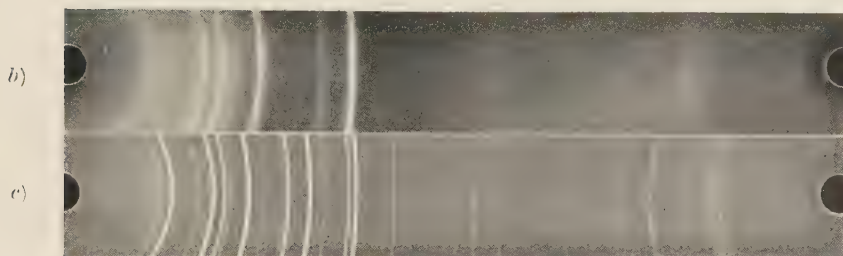



Fig. 1ᵇ: diam. camera mm. 114,59.

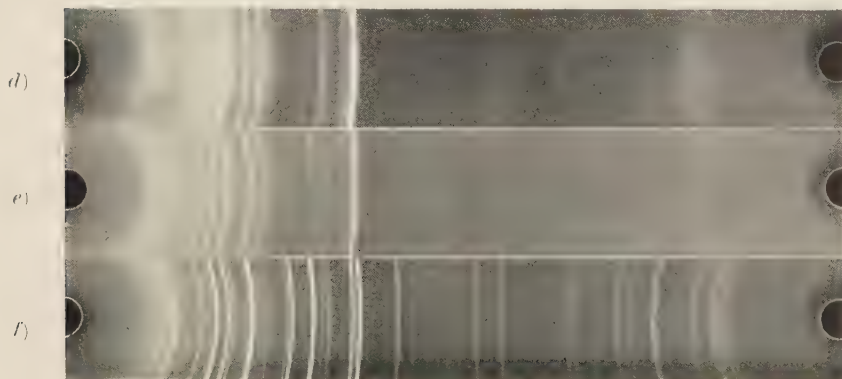



Fig. 3: diam. camera mm. 114,59.

Rad. Cu K.

a) Gelo di allumina parzialmente disidratato a 105°.
b) » » » totalmente » a 600°.
c) » » » trattato a 1000°.
d) Cloruro di alluminio esaidrato, trattato a 850°.
e) » » » » » a 950 .
f) » » » » » a 1050°.

Rad. Cu K; diam. camera mm. 57,3.

g) Nitrato di alluminio noveidrato, trattato a 850°.
h) » » » » a 1000°.
i) Allumina Bayer.
l) La stessa, dopo trattamento a 600°.
m) » » » » 900°.
n) » » » » 1000°.

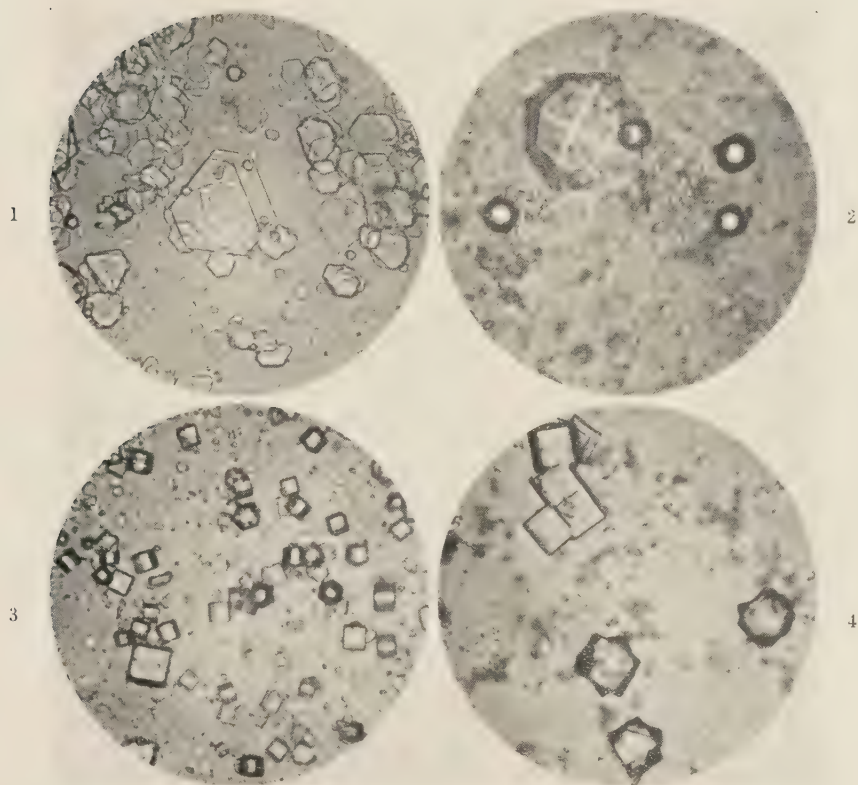



Fig. 6: *Allumina ottenuta per demolizione termica di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ a bassa temperatura.*

N. 1. — Durata dell'attacco: 80 ore. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 0.908. Temperatura: 20°. pH = 12.01. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

N. 2. — Durata dell'attacco: 3 mesi. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 0,908. Temperatura: 80° pH = 11.98. Ingrandimento: × 410 (Icositetraedri).

N. 3. — Durata dell'attacco: 80 ore. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura: 80°. pH = 12.49. Ingrandimento: × 200 (Cubi).

N. 4 — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura: 50°. pH = 12,54. Ingrandimento: × 200 (Geminati cubici di compenetrazione).

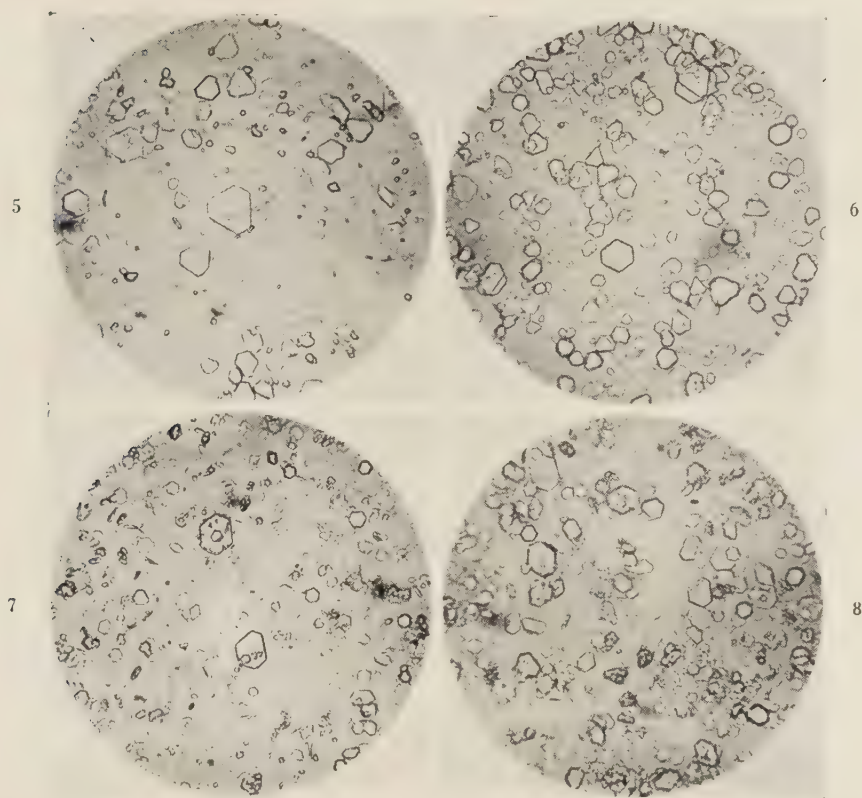



Fig. 7: *Allumina ottenuta per demolizione termica di $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ a bassa temperatura, con aggiunta al sistema di agenti tensio-attivi.*

N. 5. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 0,908. Temperatura: 20°. pH = 12,00. Invadina: 0,07%. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

N. 6. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 0.908. Temperatura: 20°. pH = 12.04. Leonil: 0.07%. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

N. 7. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura 20°. pH = 12.57. Darex: 0,3%. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

N. 8. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura: 20°. pH = 12.47. Igepon: 0,07%. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

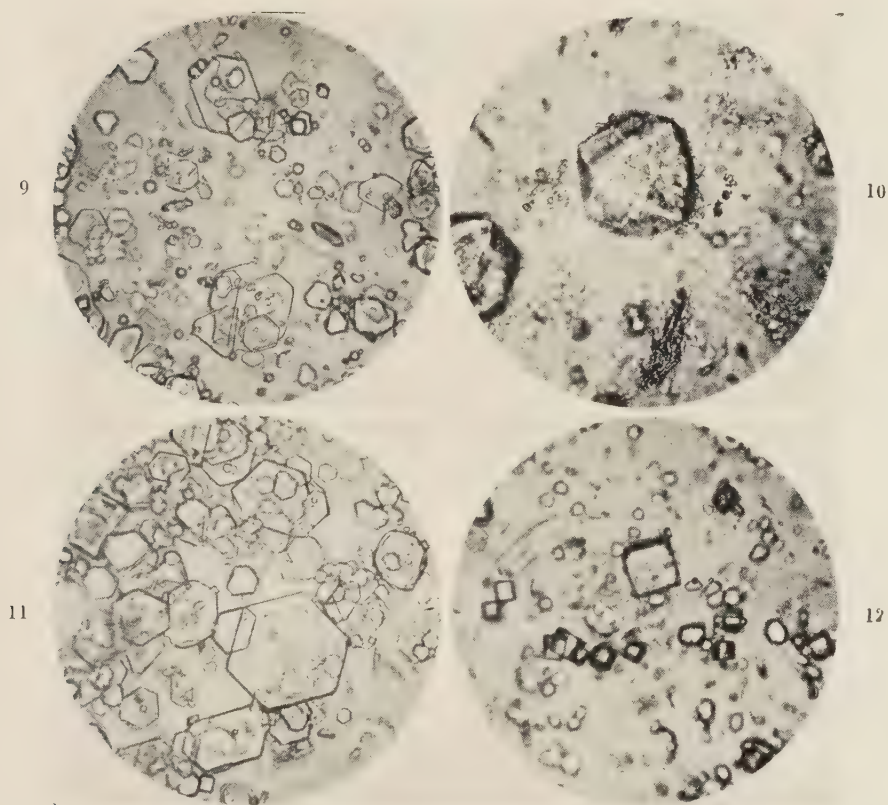



Fig. 8: *Allumina ottenuta per demolizione termica di $Al(NO_3)_3 \cdot 9H_2O$ a bassa temperatura.*

N. 9. — Durata dell'attacco: 80 ore. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 0,908. Temperatura: 20°. pH = 12.06. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

N. 10 — Durata dell'attacco: 80 ore. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 0,908. Temperatura: 50°. pH = 11.61. Ingrandimento: × 410 (Icositetraedri).

N. 11. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 1,81. Temperatura: 20°. pH = 12.09. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

N. 12. — Durata dell'attacco: 80 ore. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura: 80°. pH = 12.55. Ingrandimento: × 200 (Cubi).

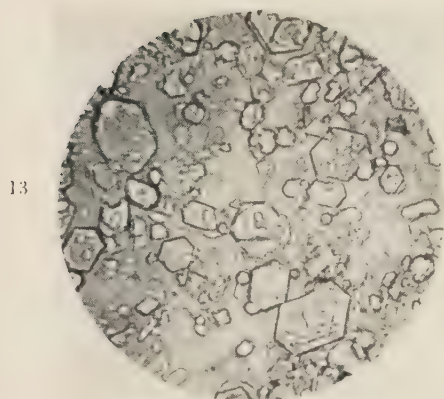
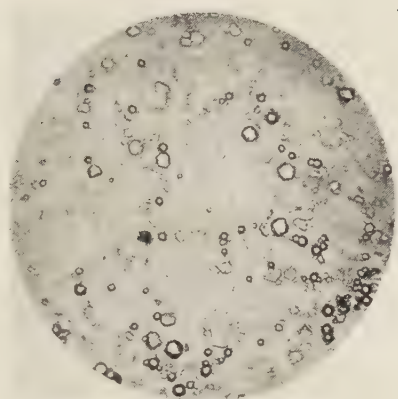
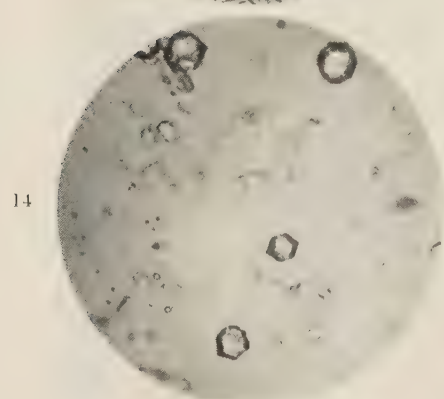
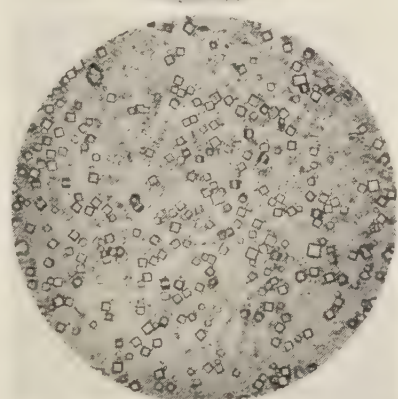



Fig. 9: *Allumina ottenuta per demolizione termica di $Al\,OH\,(HCOO)_2 \cdot H_2O$ a bassa temperatura.*

Fig. 10: *Allumina ottenuta per decomposizione dell'amalgama.*

N. 13. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 1.81. Temperatura: 20°. pH = 12.11. Ingrandimento: × 410 (Lamelle esagonali).

N. 14. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5.45. Temperatura: 50° pH = 12.60. Ingrandimento: × 410 (Icositetraedri e rombododecaedri).

N. 15. — Durata dell'attacco: 3 mesi. — CaO/Al_2O_3. nel sistema iniziale: 0.908. Temperatura: 20°. pH = 12,01. Ingrandimento: × 200 (Icositetraedri minuti).

N. 16. — Durata dell'attacco: 80 ore. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura: 20°. pH = 12.35. Ingrandimento: × 200 (Cubi).

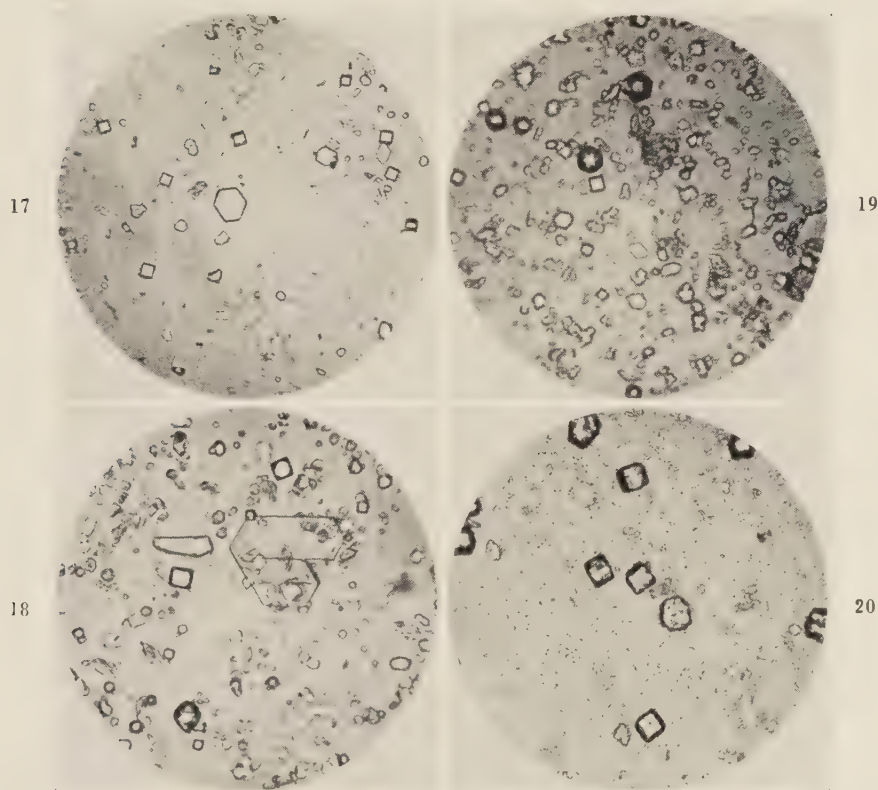



Fig. 11: *Allumina Bayer*: $Al_2O_3 \cdot 3H_2O$.
N. 17 e 18: tal quale; N. 19 e 20: disidratata a 600° (γ - Al_2O_3).

N. 17. — Durata dell'attacco: 3 mesi — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 1,81. Temperatura: 20°. pH = 12,47. Ingrandimento: × 410 (Rare lamelle esagonali e qualche cubetto).

N. 18. — Durata dell'attacco: 1 anno. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura: 20°. pH = 12,65. Ingrandimento: × 410 (Rare lamelle esagonali, cubi e loro combinazioni).

N. 19. — Durata dell'attacco: 80 ore. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 1,81. Temperatura: 20°. pH = 12,41. Ingrandimento: × 410 (Cubi ed ottaedri).

N. 20. — Durata dell'attacco: 3 mesi. — CaO/Al_2O_3 nel sistema iniziale: 5,45. Temperatura: 20°. pH = 12,65. Ingrandimento: × 410 (Cubi ed icositetraedri).

Rappresentazione in S_5 del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali

Nota del Socio ordinario **Nicolò Spampinato**

Sunto. – Si studia la rappresentazione in S_5 del piano complesso completo, costituito dall' insieme delle coppie punto-retta appartenentisi del piano complesso punteggiato e rigato, con una congruenza di piani di S_5, composta con la conguenza di rette di S_5 che dà la prima rappresentazione complessa del piano biduale. Tali congruenze intervengono nello studio della rappresentazione iperspaziale dei rami lineari e superlineari delle curve algebriche piane complete e vengono studiate pure in relazione al gruppo di trasformazioni birazionali di S_5, rispondente al gruppo di trasformazioni birazionali dell' S_2 prolungato nel campo biduale. Questa nota fa seguito a due precedenti [1].

18. – *La congruenza di piani H_3 di S_5 a cui appartiene la ridotta della falda tridimensionale di grado eguale all' ordine del ramo che la determina.*

Dalla proprietà II) del n° 15, per il caso $v = 1$, e dalla proprietà I) del n° 17, per il caso $v > 1$, di cui gode la falda tridimensionale di S_5, rispondente ad un ramo lineare o superlineare di una curva algebrica c^n di S_2, si ricava che:

I) *In ogni caso l' ordine v del ramo è eguale al grado della prima fra le ridotte della falda tridimensionale che risulti bidimensionale.*

II) *Tale ridotta bidimensionale è sempre un piano: il piano congiungente il punto di S_2, origine del ramo, con la retta di S'_2 omologa nella proiettività di equazioni* (5), *della retta tangente al ramo nell' origine, cioè il piano generatore della $V_3^{n,m}$ rispondente alla coppia punto-retta, della $C^{n,m}$ completa, costituita da tale origine e da tale tangente.*

Da tale osservazione segue che assume particolare importanza l' insieme H_3 degli ∞^3 piani di S_5 rispondenti alle ∞^3 coppie punto-retta appartenentisi, dell' S_2 complesso: *ad una tale coppia* (P, t) *risponde in S_5 il piano $\pi = Pt'$, con t' retta di S'_2 omologa di* t nella proiettività (5)

---

[1]) N. Spampinato. *Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa.* Rendic. Accad. Sc. fis. e matem., Napoli, Serie 4ª, Vol. XXII, 1955.

Le falde tridimensionali dell' S_5 determinate dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa. Ibidem.

Anche in questa nota si continua la numerazione dei paragrafi e delle formole delle due note precedenti.

Di tali piani per un generico punto R di S_5 ne passa uno solo, (cioè l'insieme H_3 è una congruenza di ordine 1 dell' S_5) infatti detto P il punto in cui S_2 è segato dall' $S_3 = RS'_2$, e detto P' l'omologo di P in S'_2 per la proiettività (5), i piani di H_3, dentro detto S_3, costituiscono il fascio di asse PP', e di tali piani per R ne passa uno solo, dato che R non appartiene all' asse PP', essendo stato fissato genericamente in S_5.

Si noti che le ∞^3 coppie punto retta (P t) appartenentisi di S_2, sono in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con gli ∞^3 E_1 di S_2 di centro P e tangente t ottenuti accoppiando ad ogni punto P di S_2 il punto P_1 *dell' intorno del prim' ordine di* P posto in ciascuna retta t del fascio di centro P. Ne segue che si ha pure una corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, fra i piani della congruenza H_3 e gli ∞^3 E_1 del piano S_2, Gli ∞^1 piani generatori della V_3^{n+m}, rispondenti ad una curva completa $C^n,^m$, appartengono tutti alla congruenza H_3, e rispondenti alle ∞^1 coppie punto-retta costituenti tale curva completa $C^n,^m$. Per ogni ramo della curva c^n, lineare o superlineare, si ha un piano della H_3, compreso fra tali ∞ piani della V_3^{n+m}, rispondente all' origine P del ramo e alla tangente t al ramo in P.

Raccogliendo si ha:

III) *Ogni* V_3^{n+m} *di* S_5, *rispondente ad una curva completa* $C^n,^m$, *di* S_2, *è composta con* ∞^1 *piani di una congruenza* H_3, *di ordine* 1, *dell'* S'_5 *i cui* ∞^3 *piani sono in corrispondenza biunivoca senza eccezione con le* ∞^3 *coppie punto retta* (P, t) *appartenentisi del piano* S_2, *e con gli* ∞^3, E_1 *di questo piano, di centro* P *e tangente* t.

IV) *Per la congruenza* H_3 *sono singolari le rette* PP', *con* P *e* P' *in* S_2 *ed* S'_2 *corrispondentisi nella proiettività di equazioni* (5. *In un piano* $\pi = Pt$ *di* H_3 *vi è una sola retta singolare di* H_3: *la retta* PP'.

Si noti ora che per la proprietà III) del n° 12 ogni piano $\pi = Pt$ della congruenza H_3 si presenta come sostegno del fascio di rette di centro P'; rette che hanno particolare importanza per ogni V_3^{n+m} che ammetta fra i suoi piani generatori tale piano π: sono le rette di contatto degli ∞^1 S_3 tangenti distinti che la V_3 ammette nei punti di detto piano. Ne segue che, in corrispondenza agli ∞^3 piani di H_3, si avranno ∞^3 fasci di rette, formanti in S_5 una congruenza (di ∞^4 rette) che indicheremo con H_4. Tenendo conto che per un generico punto R di S_5 passa un solo piano $\pi = Pt'$ di H_3 e quindi una sola retta del fascio di centro P' avente per sostegno tale piano, risulta che anche la congruenza H_4 è di ordine 1.

Si ha perciò:

V) *La congruenza di piani* H_3 *è composta con una congruenza di*

rette H_4 *di* S_5 *di ordine* 1. *Ogni piano* $\pi = Pt'$ *di* H_3 *è sostegno di un fascio di rette di* H_2: *quello avente per centro il punto* P' *di* S'_2 *omologo del punto* P *di* S_2 *nella proiettività* (5). *L'* S_3 *tangente ad una* $V_3^{n \cdot m}$ *contenente* $\pi = Pt'$ *in un suo punto generico* R, *(non di* S_2*) tocca la* V_5 *in ogni punto della retta* RP' *di* H_4 *passante per* R.

NOTA. La proprietà V) mette in evidenza l' importanza della congruenza di rette H_4 di S_5 di cui risulta composta ogni $V_3^{n \cdot m}$ di S_5 rispondente ad una curva completa $C^{n,m}$ del piano S_2. Ebbene questa congruenza H_4, escludendo le rette di S_2, dà la *conguenza di* S_5 *che costituisce la prima rappresentazione complessa del piano biduale* [che si ottiene prolungando nel campo biduale l' S_2 complesso]. Ciò equivale a sostituire ai tre numeri complessi (x_1, x_2, x_3), non tutti nulli definiti a meno di un fattore complesso non nullo, x, i tre numeri biduali, sotto forma di matrici:

$$(95) \qquad \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ 0 & x_1 \end{matrix} \right\| , \quad \left\| \begin{matrix} x_2 & y_2 \\ 0 & x_2 \end{matrix} \right\| , \quad \left\| \begin{matrix} x_3 & y_3 \\ 0 & x_3 \end{matrix} \right\| ;$$

non tutti nulli, nè divisori dello zero, definiti a meno di un fattore biduale

$$(96) \qquad \left\| \begin{matrix} x & y \\ 0 & x \end{matrix} \right\|$$

non nullo, nè divisore dello zero. La retta dell' S_5 complesso che dà la prima rappresentazione complessa del punto dell' S_2 biduale di coordinate biduali (95) è precisamente la retta g congiungente il punto

$$(97) \qquad P' \, (0, x_1 \; ; \; 0 \; , \; x_2 \; , \; 0 \; , \; x_3)$$

del piano S'_2 con il punto (fuori di S'_2)

$$(98) \qquad R \, (x_1 \; , \; y_1 \; , \; x_2 \; , \; y_2 \; , \; x_3 \; , \; y_3).$$

Tale retta $P'R$ è precisamente la retta della congruenza H_4 passante per R. Infatti l' S_3 congiungente R con S'_2 seca l' S_2 nel punto

$$(99) \qquad P \, (x_1 \; , \; 0 \; , \; x_2 \; , \; 0 \; , \; x_3 \; 0)$$

cioè nel punto che ha per omologo in S_2, per la proiettività (5), il punto P' dato dalla (97). Il punto P' è pertanto il centro della stella di rette del-

l' $S_3 = S'_2 P$ facente parte della congruenza H_4 (e la retta PP' sarà l' asse del fascio di piani dell' $S_3 = S'_2 P$, facente parte della congruenza H_3). La retta $g = P'R$ appartiene pertanto ad H_4. Si ha perciò:

IV) *La congruenza di rette* H_4 *di cui è composta la congruenza* H_3 *per la proprietà* V), *escluse le rette del piano rigato* S'_2 *dà la congruenza di rette in* S_5 *prima rappresentazione complessa del piano biduale.*

(Questa proprietà è in relazione alla proprietà, già notata: *la* $V_3^{n' n''}$, *rispondente ad una curva completa* $C^{n', n''}$ [*determinata da una curva luogo* c^n *del piano complesso* S_2], *rappresenta la parte irriducibile della* V_3 *di ordine* n^2, *che dà la rapprentazione complessa in* S_5 *della curva biduale ottenuta prolungando nel campo biduale la curva complessa* c^n.

19. — *I fasci di piani della congruenza* H_3 *rispondenti alle curve complete elementari* $C^{1,0}$ *e* $C^{0,1}$.

Tenendo conto delle proprietà dimostrate nel n° 2 [relativamente alle curve complete elementari $C^{1,0}$ e $C^{0,1}$ rispondenti, in S_5, ad un fascio di piani avente per asse nel primo caso una retta di S'_2 e nel secondo caso una retta $g = PP'$ della W^3_3], si ha che:

Gli ∞^3 *piani generatori della congruenza* H_3 *si distribuiscono in due sistemi di* ∞^2 *fasci di piani, aventi per assi il primo le rette del piano rigato di sostegno* S'_2 *ed il secondo le rette della rigata* W^3_3. *Ogni piano di* H_3 *appartiene ad un determinato fascio del primo sistema e ad un determinato fascio del secondo sistema.*

Tali fasci di piani rispondono alle curve complete elementari $C^{1,0}$ *e* $C^{0,1}$ (*di ordine completo* $n = 1$).

20. — *Proprietà relative alle coppie di* E_1 *derivanti dalla reciproca posizione dei due piani della congruenza* H_3 *che rappresentano una tale coppia.*

Consideriamo in S_2 la coppia di E_1 determinati da due coppie punto-retta appartenentisi (A, a) e (B, b), rappresentati, perciò, dai due piani Aa' e Bb' della congruenza H_3. Nel caso generico A è distinto da B; a è distinta da b. La retta $c = AB$ è distinta da a e da b. Il punto $C = ab$ è distinto da A e da B. Sarà perciò C non allineato con A e B, e c non formante fascio con a e b. I tre lati del triangolo ABC sono dati da $a = AC$, $b = BC$ e $c = AB$.

Le rette a' e b' sono, per ipotesi, le rette del piano S'_2 corrispondenti delle rette a e b di S_2 per la proiettività (5). I due piani generatori di H_3 considerati Aa' e Bb', in tale caso generico, hanno, pertanto, in comune il solo punto $C' = a' b'$ del piano S'_2. Essi sono perciò congiunti da un

S_4, che conterrà S'_2 (dovendo contenere le rette a' e b' di tale piano) e la retta che S_4 secherà nel piano S_2 sarà la retta $c = AB$ (dovendo detto S_4 contenere i punti A e B di S_2). Si ha perciò:

I) *Due piani generici della congruenza* H_3 *sono congiunti da un* S_4 *di* S_5, *appartenente alla stella di vertice* S'_2, *e secante* S_2 *nella retta* $c = AB$, *congiungente i centri* A *e* B *dei due* E_1 *di* S_2 *rappresentati da tali due piani di* H_3, *e costituenti una generica coppia di* E_1 *di* S_2.

Dimostriamo ora che:

II) *Due piani distinti di* H_3 *risultano conspaziali quando e solo quando appartengono ad uno stesso fascio di piani di* H_3.

Infatti per avere i due piani Aa' e Bb' di H_3 come spazio congiungente un S_3, anzichè un S_4, occorre e basta che essi, oltre il punto $C' = a'\,b'$, abbiamo in comune un altro punto, e quindi una retta passante per C'. Se $a' \neq b'$ tale S_3 congiungente i due piani conterrà il piano S'_2 congiungente a' e b', e per contenere i punti A e B questi dovranno coincidere col punto che S_3 secherà in S_2, e quindi a e b passeranno per tale punto che coinciderà, pertanto, con il punto C di S_2 avente per omologo nelle (5) il punto $C' = a'\,b'$. La retta comune ai due piani sarà la retta CC'. Questa retta è asse di un fascio di piani di H_3 del primo sistema (n° 19).

Se invece è $a' = b'$ sarà $a = b$ e quindi $A \neq B$ e i due piani di H_3 considerati, Aa' e Bb', si secano nella retta $a' = b'$ di S'_2, retta che è asse di un fascio di piani di H_3 del secondo sistema (n° 19). La proprietà II) è pertanto dimostrata.

Risulta inoltre che:

II') *I due piani, di* H_3 Aa' *e* Bb', *appartengono ad un fascio del primo sistema quando e solo quando è* $A = A'$; *appartengono, invece, ad un fascio del secondo sistema quando è solo quando è* $b = b'$.

Tenendo conto che i piani di H_3 costituenti un fascio del primo o del secondo sistema sono quelli rispondenti agli E_1 di una curva completa elementare $C^{0,1}$ (fascio di rette), o $C^{1,0}$ (punteggiata) (n° 4), si ha che:

III) *Una coppia di* E_1 *di* S_2 *è rappresentata da due piani di* H_3 *conspaziali quando, e solo quando, appartengono ad una stessa curva completa elementare.*

Fissato un E_1 in una data curva completa $C^{n,m}$, *non elementare,* e quindi di ordine completo $\eta = n + m > 1$, detto Aa' il piano di H_3 rappresentato da E_1, sarà Aa' appartenente ad un determinato fascio del 1° sistema e ad un determinato fascio del 2° sistema di H_3 [per la proprietà del n° 9], ne segue che l'E_1 assegnato in $C^{n,m}$ appartiene a due determinate curve complete elementari $C^{0,1}$ e $C^{1,0}$: quelle rispondenti a tali due

fasci di piani di H_3. Quando avviene che la $C^n_{\cdot}{}^m$ abbia qualche altro E_1 appartenenti ad una di queste due curve complete elementari? Se diciamo Bb' il piano di H_3 rispondente ad un tale altro E_1, i due piani Aa' e Bb' di H_3 dovranno appartenere ad uno stesso fascio del 1° o del 2° sistema di H_3, cioè deve essere o $A = B$ o $a' = b'$, ovvero i due E_1, che tali due piani rappresentano, diciamo (A, a) e (B, b), devono avere: *o lo stesso centro* $A = B$, *o la stessa tangente* $a = b$. La curva luogo c^n, che determina la curva completa $C^n_{\cdot}{}^m$ data, avrà, pertanto: o un punto multiplo (almeno doppio) in A, oppure una retta tangente multipla (almeno doppia) in a. In tali casi la coppia dei due E_1, $(A\ a)$ e $(B\ b)$ della curva completa $C^n_{\cdot}{}^m$, si dirà *singolare*, perchè per la c^n è singolare o il punto $A = B$, o la retta tangente $a = b$. In tal caso i piani Aa' e Bb' [della V_3^{η} rispondente in S_5 alla $C^n_{\cdot}{}^m$, rispondente alla coppia singolare di E_1 della $C^n{}^m$] non appartengono ad un S_4, ma sono conspaziali. Si ha perciò:

IV) *Le coppie di* E_1 *singolari di una curva completa* $C^n_{\cdot}{}^m$ *non elementare rispondono alle coppie conspaziali di piani dell* V_3^{η}, *con* $\eta > 1$, *rispondente alla* $C^n_{\cdot}{}^m$.

Si aggiunga ora che nel caso $A = B$ e $a \neq b$ le due tangenti a e b dei due E_1, rispondenti alla coppia singolare, possono, in particolare, risultare infinitamente vicine, e quindi il punto doppio A di c^n, [che nel caso generico è *nodale*] sarà *cuspidale*. Così nel caso $A \neq B$ ed $a = b$ i due centri A e B dei due E_1 suddetti possono, in particolare, risultare infinitamente vicini, e quindi la tangente doppia a alla c^n, che nel caso generico ha i punti di contatto A e B non infinitamente vicini, risulta una tangente *d' inflessione*. In entrambi i due casi la coppia di piani di H_3 rispondente alla coppia singolare dei due E_1, sarà costituita da due piani conspaziali ed infinitamente vicini nel fascio di piani del primo o del secondo sistema di H_3 a cui appartengono. Si ha perciò:

V) *Le coppie di* E_1 *singolari, rispondenti a coppie di piani conspaziali della* V_3^{η}, *con* $\eta > 1$, *determinate dai punti doppi e dalle tangenti doppie della* c^n, *che determina la* $C^n_{\cdot}{}^m$ *completa rappresentata dalla* V_3^{η}, *rispondono, in particolare, a coppie di piani infinitamente vicini del fascio del primo o del secondo sistema di* H_3 *a cui appartengono, se si tratta di punti doppi cuspidali o di tangenti doppie d' inflessione.*

NOTA. E' in base alle proprietà della V_3^{η} [*ora messe in relazione alle proprietà della coppia di* E_1 *della* c^n, con le proposizioni IV e V] che sono stati introdotti i due *caratteri singolare e cuspidale* della $C^{n \cdot m}$ n' 5 e 10).

21. — *Il gruppo di trasformazioni birazionali dell'* S_5 *determinato dal gruppo delle trasformazioni birazionali dell'* S_2.

Consideriamo nell' S_2 la trasformazione birazionale di equazioni:

$$X_j = f_j\,(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3). \qquad (j = 1,\,2,\,3) \tag{100}$$

Resta determinata in S_5 la trasformazione birazionale di equazioni:

$$\left\{\begin{aligned} X_j &= f_j\,(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) \\ Y_j &= \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\,y_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_2}\,y_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\,y_3 \,. \end{aligned}\right. \qquad (j = 1,\,2,\,3) \tag{101}$$

Per questa trasformazione, supposte le forme f_j di grado $q > 1$, risultano sempre fondamentali tutti i punti del piano S'_2 perchè per $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ si annullano le tre forme $f_j\,(x_i)$ e le loro derivate, e, quindi, tutti i secondi membri delle sei equazioni (101).

Si noti inoltre che se P^* $(x^*_1,\,x^*_2,\,x^*_3)$ è un punto fondamentale della trasformazione (100) assegnata in S_2, ogni punto della retta g^*, della W^4_3, uscente da P^*, e quindi di equazioni parametriche:

$$x_j = \rho\,x^*_j \qquad , \qquad y_j = \sigma\,x^*_j \tag{102}$$

risulta pure fondamentale per la trasformazione (101) di S_5, perchè sostituendo queste equazioni (102) nelle (101) si ha:

$$\left\{\begin{aligned} X_j &= f(\rho\,x^*_i) = \rho^q\,f_j\,(x^*_i) = 0 \\ Y_j &= \rho^{q-1}\,\sigma\left[\frac{\partial f_j}{\partial\,x^{*1}}\,x^*_1 + \frac{\partial f}{\partial\,x^*_2}\,x^*_2 + \frac{\partial f^*}{\partial x^*_3}\,x^*_3\right] = \rho^{q-1}\,\sigma f_j\,(x^*_j) = 0. \end{aligned}\right. \tag{103}$$

La trasformazione (101) in S_5 ammette altri punti fondamentali?

Se in un punto R $(x_1\,,\,y_1\,,\,x_2,\,y_2\,,\,x_3\,,\,y_3)$ di S_5 devono annullarsi tutti i secondi membri delle (101), devono intanto annullarsi nel punto P $(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ di S_2 le tre $f_j\,(x_i)$, cioè P deve essere un punto fondamentale P^* della trasformazione assegnata nel piano S_2, e quindi R deve appartenere all' $S_3 = P^*\,S'_2$ di equazioni parametriche:

$$x_j = h\,x^*_j\,, \tag{104}$$

cioè R sarà un punto del tipo R^* $(h x^*_1\,,\,y_1\,,\,h\,x^*_2\,,\,y_2\,,\,h\,x^*_3\,,\,y_3)$. Sup-

posto le x^*_i non tutte nulle (cioè R^* fuori del piano S'_2) per annullarsi in R^* le tre forme che nelle (101) dànno le Y_j deve essere:

$$(105) \qquad h^{q-1} \left| \frac{\partial f_j}{\partial x^*_1} y_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x^*_2} y_2 + \frac{\partial f_j}{\partial x^*_3} y_3 \right| = 0 . \qquad (j = 1, 2, 3)$$

Per essere R^* fuori di S'_2 deve essere $h = 0$, ne segue che per essere soddisfatta la condizione (105) deve essere nullo il fattore in parentesi quadra, cioè la terna (y_1, y_2, y_3) deve essere una soluzione comune delle tre equazioni lineari

$$(106) \qquad \frac{\partial f_j}{\partial x^*_1} y_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_2} y_2 + \frac{\partial f_j}{\partial x^*_3} y_3 = 0 , \qquad (j = 1, 2, 3)$$

che nel piano S_2 (y_1, y_2, y_3) rappresentano le tre rette polari del punto di coordinate

$$(107) \qquad y_1 = x^*_1 \quad , \quad y_2 = x^*_2 \quad , \quad y_3 = x^*_3$$

rispetto alle tre curve

$$(108) \qquad f_j (y, y_2, y_3) = 0, \qquad (j = 1, 2, 3)$$

omologhe, per la proiettività di equazioni (5) fra S_2 ed S'_2, delle tre curve del piano S_2, che determinano la rete omaloidica traformata della rete di rette del piano nella trasformazione birazionale (100), data in S_2. Essendo P^* fondamentale per questa trasformazione, sarà un punto base di detta rete e quindi il punto di S'_2 di coordinate (107) sarà un punto base della rete determinata dalle tre curve (108). Le (106) saranno perciò, le tangenti a dette tre curve in tale punto. Se le curve della rete non si toccano in P^* (supposto semplice) le tre rette (106) avranno in comune il solo punto (107) e quindi, dovendo R avere le tre y_j proporzionali alle x^*_j, sarà un punto della retta g^* di equazioni (102) [che già abbiamo notato essere fondamentale per la trasformazione (101)].

Se invece le curve della rete omaloidica hanno nel punto base semplice P^* la stessa tangente t, detta t' la retta di S'_2 in cui coincideranno le tre rette (106), risulteranno singolari per la trasformazione in S_5 tutti i punti R^* del piano congiungente P con la retta t'. Tale piano appartiene alla congruenza H_3.

Se infine le curve della rete omaloidica hanno in P^* un punto base multiplo, risultano nulli tutti i coefficienti delle tre equazioni (106) e quindi il punto R^* risulta fondamentale per la trasformazione in S_5 qualunque

siano le y_1, cioè tutto l' $S_3 = P^* S'_2$ risulta fondamentale per detta trasformazione. In tal caso risultano perciò fondamentali tutti gli ∞^1 piani del fascio del primo sistema di H_3, contenuti in $S_3 = P_* S'_2$. Si ha perciò:

I) *La trasformazione birazionale di equazioni* (101) *determinata in* S_5 *dalla trasformazione birazionale non proiettiva di equazioni* (100) *di* S_2 *ha sempre come fondamentale il piano* S'_2 *e inoltre:*

a) *una retta, della rigata* W^3_3, *uscente da ogni punto fondamentale* P^* *della trasformazione di* S_2;

b) *un piano* P^*t *della congruenza* H_3 *per ogni punto base semplice* P^* *della rete omaloidica di curve di* S_2 *legata alla trasformazione birazionale con le curve della rete aventi in* P^* *la stessa tangente;*

c) *un fascio di piani del primo sistema di* H_3, *di un* $S_3 = P^* S_2$, *per ogni punto base multiplo* P^* *della detta rete omaloidica di curve di* S_2.

Si noti esplicitamente che per il teorema I) assumono ancora particolare importanza gli ∞^3 piani generatori della congruenza H_3, introdotta nel n° 18 [in relazione allo studio delle falde tridimensionali di S_5 determinate dai rami lineari e superlineari delle curve algebriche di S_2], in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, con gli ∞^3 E_1 di S_2, e quindi con le ∞^3 coppie punto-retta appartenentisi (P, t), costituente ciascuna il *centro* P e la *tangente* t di un E_1 di S_2.

Si noti che:

II) *In un generico piano generatore* Aa' *della congruenza* H_3 *si ha sempre una retta di punti fondamentali per la trasformazione* (101), *nella retta* a' *intersezione del piano con* S'_2. *In particolare vi può essere nel piano* At' (*quando non è fondamentale per la trasformazione*) *solo una seconda retta di punti fondamentali nella retta* AA' *generatrice della* W^3_3 *posta in* Aa'.

Variando la trasformazione (100), nel *gruppo di trasformazioni birazionali* di S_2, la trasformazione (101) varierà in *un gruppo di trasformazioni birazionali dell'* S_5, che si dirà *determinato dal gruppo precedente.* Esso subordina nella congruenza H_3 un gruppo di trasformazioni, perchè ciascuna di esse trasforma un generico piano generatore della H_3 in una superficie che risulta piana e precisamente un piano di H_3. Infatti consideriamo in S_5 il piano π di H_3 rispondente ad una coppia punto-retta (A, a), congiungente i tre punti A, A' e P', con A' omologo di A nella proiettività (5) e P' punto distinto da A' e appartenente alla retta a', omologa di a nella (5).

Le equazioni parametriche di tale piano π, supposte le coordinate di A, A' e P' date dalle (53), sono le (52) (n° 14). Sostituendo le (52) nelle

(101) (per determinare le equazioni parametriche della superficie trasformata del piano AA'P' di H_3 per la trasformazione (101)) si ha:

$$X_j = \lambda^q f_j (x'_1 , x'_2 , x'_3) \tag{107}$$

$$y_j = \lambda^{q-1} \left[\frac{\partial f_j}{\partial x'_1} (x'_1+p_1 \sigma)+ \frac{\partial f_j}{\partial x'_2} (x'_2+p^2 \sigma)+ \frac{\partial f_j}{\partial x'_3} (x'+p_3 \sigma) \right] \tag{108}$$

$$= \lambda^{q-1} \left[\left(\frac{\partial f_j}{\partial x'_1} x'_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_2} x'_2 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_3} x'_3 \right) + \right.$$

$$\left. + \sigma \left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_1} p_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_{j2}} p_2 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_3} p_3 \right) \right] =$$

$$= \lambda^{q-1} \left[f_j (x'_1 , x'_2 , x'_3) + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x'_1} p_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_3} p_2 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_3} p_3 \right) \sigma \right].$$

Se è $q > 1$, cioè se la trasformazione (100) assegnata in S_2 non è una proiettività, possiamo dividere i secondi membri delle (107) e (108) per il fattore comune λ^{q-1} e le equazioni delle superficie trasformata si riducono a:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_j = f_j (x'_1 , x'_2 , x'_3) \lambda \\ Y_j = f_j (x'_1 , x'_2 , x_3) + \left(\frac{\partial f_j}{\partial x'_1} p_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_2} p_2 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_3} p_3 \right) \sigma \end{array} \right. \tag{109}$$

Le (109) rappresentano, nel caso generico, un piano π, e precisamente il piano congiungente il punto $\bar{A}$ di S_2 omologo di A per la trasformazione data in S_2, con il punto $\bar{A}'$ omologo di $\bar{A}$ nella proiettività (5) ed il punto PA di S_2 omologo del punto P' $(0, p_1 , 0, p_2 , 0, p_3)$ di S_2 nella proiettività di S'_2 di equazioni

$$y'_j = \frac{\partial f_j}{\partial x'_1} y_1 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_2} y_2 + \frac{\partial f_j}{\partial x'_3} y_3 \tag{110}$$

determinata dalla trasformazione assegnata in S_3 *di equazioni* (100) *e dal punto* A' $(0, x'_1 , 0, x'_2 , 0, x'_3)$ di S'_2. Si ha perciò:

III) *Ad un generico piano* π *di* H_3 *(di equazioni parametriche* (52)) *corrisponde un piano* $\bar{\pi}$ *di* H_3 *nella trasformazione birazionale* (101) *di* S_5 *(di equazioni parametriche* (109)).

Si noti che un piano generico π di H_3 possiede sempre una retta singolare per la trasformazione (101) per il teorema I) (la retta che tale piano ha in S'_2.) Ciò spiega perchè ad un tale piano corrisponde un piano, anzichè una superficie di ordine q. [Questa si spezzerà in tale piano e in una superficie di ordine $q - 1$ rispondente alla retta singolare suddetta].

La trasformazione subordinata dalla trasformazione birazionale (101) fra i due piani π e $\bar{\pi}$ è una proiettività, in cui si corrispondono i punti A' e $\bar{A}'$ (che si ottengono dalle (51) e (109) per $\lambda = \sigma = 0$), le rette, della rigata W^3_3, AA' e $\bar{A}A'$ (che si ottengono per $\sigma = 0$) e le rette $A'P'$ e $\bar{A}'\bar{P}'$ (che si ottengono per $\lambda = 0$). Ne segue che al fascio di rette di π di centro A' corrisponde il fascio di rette di $\bar{\pi}$ di centro $\bar{A}'$ e alle due rette in cui π seca la V^3_3 e il piano S'_2 corrispondono le rette in cui π seca pure la V^3_3 ed S'_2. Si noti inoltre che tali due fasci di rette sono le rette che la congruenza H_4 (di cui è composta la H_3) ha in π e $\bar{\pi}$. Ne segue che:

IV) *Ad una generica retta della congruenza* H_4 *per la trasformazione birazionale* (101) *di* S_5 *corrisponde una retta di* H_4.

V) *Ad una generica retta della* W^3_3 *per la trasformazione* (101) *corrisponde una retta della* W^3_3.

22. — *Piano complesso completo.*

I teoremi III), IV) e V) del n° precedente, relativi al comportamento della trasformazione birazionale (101) di S_5 rispetto ai tre enti H_3, H_4, e W^3_3 applicati: al piano generatore generico di H_3, alla retta generatrice gegerica di H_4 e alla *retta generatrice* generica della W^3_3, mettono in evidenza l'opportunità di indicare la W^3_3, considerata, non come l'insieme dei sui ∞^3 punti, ma come insieme delle sue ∞^2 rette generatrici $g = PP'$, con H_2. Questo ente bidimensionale H_2 costituisce un piano *proiettivo complesso*, perchè le sue ∞^2 rette generatrici $g = PP'$ si ottengono congiungendo ogni punto P di S_2 con il suo omologo P' in S'_2, per la proiettività (5).

In quanto alla congruenza H_4 sappiamo già che è un ente a quattro dimensioni complesse, che rappresenta i punti del *piano biduale*. (di dimensione biduale 2, e quindi di dimensione complessa 4, perchè i numeri biduali sostituiscono un algebra di ordine 2, definita nel corpo complesso).

In quanto alla congruenza H_3 sappiamo già che i suoi ∞^3 piani generatori sono in corrispondenza buinivoca, senza eccezioni, con le ∞^3

coppie punto retta appartenentisi del piano complesso S_2. Ora ogni *curva completa* $C^{n,m}$ di S_2 è un ente, ad una dimensione, subordinato di tale ente tridimensionale di coppie punto-retta appartenentisi, essendo costituita da ∞^1 di tali coppie (P, t), perchè, considerata la $C^{n,m}$ determinata dalla curva algebrica luogo c^n, P varia in c^n e t è la tangente a c^n in P, per P semplice, o una delle tangenti in P, se P è multiplo con le tangenti non tutte coincidenti.

Sorge quindi la convenienza di chiamare l' ente tridimensionale costituito dalle coppie punto-retta appartenentisi, *ambiente delle curve algebriche complete, piano complesso completo*, per distinguerlo dal *piano complesso punteggiato* e dal *piano rigato*, dove variano i punti P e le rette t delle suddette ∞^3 coppie (P, t). Ne segue allora che la congruenza H_3 viene a rappresentare, in S_5 con i sui ∞^3 piani generatori, detto *piano completo*. Si ha perciò:

I) *I tre enti* H_2, H_3, H_4, di S_5 *con i loro* ∞^2, ∞^3, ∞^4 *elementi generatori rappresentano, rispettivamente, il piano complesso punteggiato, il piano complesso completo ed il piano biduale punteggiato.*

Ne segue che: *il piano complesso completo*, (ambiente delle curve complesse complete $C^{n,m}$) *si presenta come ente tridimensionale intermedio fra il piano complesso punteggiato ed il piano biduale punteggiato.* Si noti esplicitamente che:

II) *Ogni generatrice di* H_2 *è asse di un fascio di piani generatori del primo sistema di* H_3. *Ogni piano generatore di* H_3 *è il sostegno di un fascio di rette di* H_4.

III) *La trasformazione birazionale* (101) *di* S_5 *trasforma in sè stesso ciascuno dei tre enti* H_2, H_3, H_4, *trasformando un elemento generico di* H_2, H_3 *ed* H_4 *in un determinato elemento dello stesso insieme* H_2, H_3 *ed* H_4.

NOTA. E' bene ricordare che, per la proprietà III) del n° 18, la congruenza H_3 è anche in corrispondenza biunivoca senza eccezioni con l'insieme degli ∞^3 E_1 dell' S_2 complesso, insieme che può chiamarsi S_2 *proiettivo differenziale complesso*, e che si ottiene dal *piano complesso completo* quando ad ogni elemento (P, t) di questo si sostituisce l' E_1 che esso determina, di centro P e tangente t, e perciò costituito da P e dal punto di t posto nell' intorno del prim' ordine di P.

INDICE

Il cranio giovanile di Elephas antiquus italicus di Pignataro Interamna, nella Valle del Liri

memoria del socio ordinario **Geremia D'Erasmo**
e della dott. **Maria Moncharmont Zei**

(presentata nell'adunanza del dì 5 novembre 1955 per la inserzione nel volume in corso degli Atti)

(con 17 fig. interc. e 5 tav.)

Sunto. — Premesso un cenno storico sul rinvenimento del fossile e sulle particolari cure che richiesero la preparazione ed il montaggio di esso nel Museo paleontologico di Napoli, viene descritto il cranio di *Elephas antiquus italicus* scoperto nel 1949 nel noto giacimento pleistocenico di Pignataro Interamna nella valle del Liri.

Allo studio osteologico particolareggiato di tale avanzo, che permette utili considerazioni sull' età ed il sesso dell' individuo al quale esso apparteneva, nonchè sulla sua attribuzione ad una specie e ad una razza (*Elephas antiquus italicus*) già nota per altri due crani, rispettivamente rinvenuti nello stesso giacimento quaternario di Pignataro Interamna (1926) ed in quello di Fonte Campanile presso Viterbo (1941), seguono i necessari confronti con questi due esemplari, oltre che con le due specie attualmente viventi nell' India e nell' Africa.

Il fossile qui illustrato, che pur appartenendo ad un individuo non giunto ancora a completo sviluppo si rivela come il cranio di *Elephas antiquus* meglio conservato fra quelli finora descritti, consente di concludere che la specie è strettamente collegata — anche per i dettagli dell'osteologia cranica, come si era già precedentemente affermato per i caratteri della dentizione — con l' elefante asiatico anzichè con l' africano.

Il teorema delle trasformazioni lineari dei cavi di precompressione nel calcolo a rottura

Nota del prof. **Vincenzo Franciosi**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 5 novembre 1955)

Sunto. — È noto (teorema di Guyon) che il regime statico di una trave continua a vincoli rigidi in c. a. precompresso è invariante rispetto a qualsiasi trasformazione lineare dell'asse dei cavi, consistente nel sommare alle ordinate di quest'ultimo quelle di un qualsiasi diagramma costituito da una spezzata rettilinea avente le cuspidi in corrispondenza degli appoggi intermedi, e annullantesi sugli appoggi terminali. Si dimostra in questa nota che, nello spirito del « limit design », sono invarianti, rispetto alle trasformazioni lineari del cavo, anche il coefficiente di sicurezza a rottura, e la posizione delle cerniere di snervamento.

1) *Premessa* — Il teorema di Guyon assicura che, se alle eccentricità e del cavo risultante di una trave continua in c. a. precompresso (fig. 1 a) si sommano le quantità Δe proporzionali ai momenti M_Δ (fig. 1 b) generati da un qualsiasi insieme di cedimenti vincolari, sorgono dei momenti

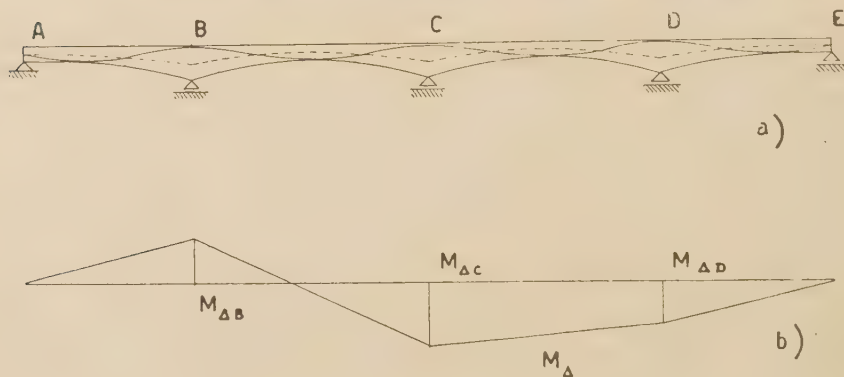



Fig. 1.

parassiti supplementari dovuti alla precompressione tali da dar luogo a momenti uguali e contrari a quelli $T\ \Delta e$ [1]). Quindi lo stato tensionale nella

[1]) L'eccentricità e si conviene sia positiva se il cavo è situato al disotto del baricentro della sezione.

trave non è modificato dall' operazione suddetta, che prende nome di trasformazione lineare dei cavi ; effetto di questa è invece di variare le reazioni sugli appoggi, di quantità in complesso in equilibrio.

La dimostrazione del teorema di GUYON è immediata attraverso la teoria delle linee d' influenza di coazioni. Il momento M_{pB} generato in B dalle variazioni Δe è fornito da

$$(1) \quad M = \int_l \mu \, m_{B\mu} \, d\,x = T \int_l \frac{\Delta e \; m_{B\mu}}{E\,I} \, d\,x = T\,k \int_l \frac{M_\Delta \, m_{B\mu}}{E\,I} \, d\,x\,;$$

$m_{B\mu}$ è la linea d' influenza del momento in B per distorsioni viaggianti di rotazione relativa, e coincide con il diagramma dei momenti generati da

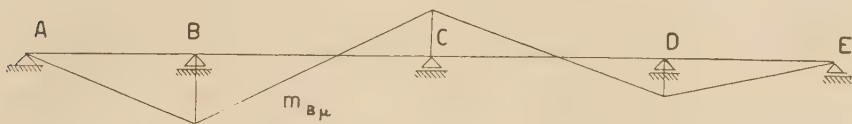



Fig. 2.

una distorsione unitaria positiva di rotazione relativa in B; la precompressione è equiparata ad una distorsione $\mu = + \dfrac{T\,e}{E\,I}$; k è il coefficiente di proporzionalità fra Δe ed M. Il principio dei lavori virtuali applicato al sistema equilibrato di forze della fig. 1 b, ed al sistema congruente di spostamenti della fig. 2, fornisce

$$(2) \qquad M_{\Delta B} \; 1 = - \int_l \frac{M_\Delta \; m_{B\mu}}{E\,I} \, d\,x \; .$$

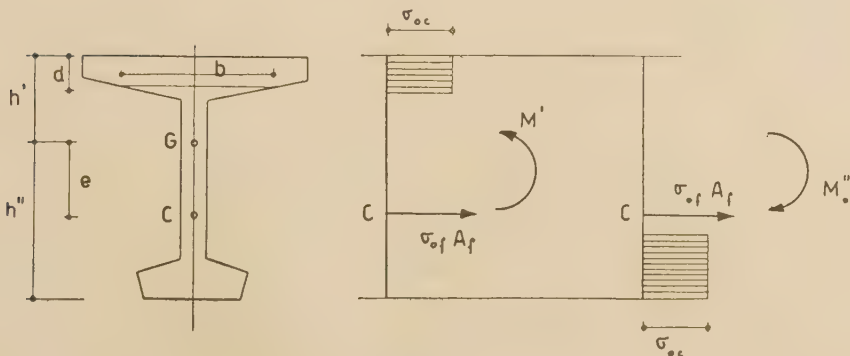



Fig 3.

Dalle (1) e (2) risulta perciò

$$M_{pB} = - T\, k\, M_{\Delta B} = - T\, \Delta e_B \quad ; \tag{3}$$

la relazione (3), valida su ogni appoggio, assicura che il diagramma dei momenti parassiti M_p è uguale e contrario a quello dei momenti $T\,\Delta e$ generati dalla variazione Δe.

2) *L' invarianza del coefficiente di sicurezza rispetto alle trasformazioni lineari del cavo.*

Il momento limite positivo M'_o in una sezione di una trave in c. a. p. è fornito (fig. 3) da [1])

$$M'_o = \sigma_{oc} \int_{h'-d'}^{h'} y\, b\, d\, y + \sigma_{of}\, A_f\, e \tag{4}$$

essendo d' fornito dall' uguaglianza

$$\sigma_{oc} \int_{h'-d'}^{h'} b\, d\, y = \sigma_{of}\, A_f\, . \tag{5}$$

Il momento limite negativo è invece fornito da

$$M''_o = - \sigma_{oc} \int_{h''-d''}^{h''} y\, b\, d\, y + \sigma_{of}\, A_f \tag{6}$$

dove d'' è fornito dall' uguaglianza

$$\sigma_{oc} \int_{h''-d''}^{h''} b\, d\, y = \sigma_{of}\, A_f\, . \tag{7}$$

Fissata la quantità $\sigma_{of}\, A_f$, si può quindi porre

$$\begin{aligned} M'_o &= \quad A' + B\, e \\ M''_o &= - A'' + B\, e \end{aligned} \tag{8}$$

essendo A', A'' e B delle costanti.

---

[1]) σ_{oc} è preso in valore assoluto, e rappresenta la tensione limite del conglomerato; σ_{of} è la tensione limite dell' acciaio.

Nella fig. 4 sono riportate le posizioni delle cerniere di snervamento corrispondenti al carico *sa* agente sulla seconda campata, la deformata di primo collasso, e i diagrammi dei momenti effettivi e di quelli limiti. Come noto è

$$s\, L_a + L_g + \Sigma_i\, M_{oi}\, \vartheta_i = O \tag{9}$$

dove ϑ_i sono gli angoli di rotazione relativa connessi con la deformata rigida, M_{oi} le coppie limiti corrispondenti, prese con segno tale che risulti

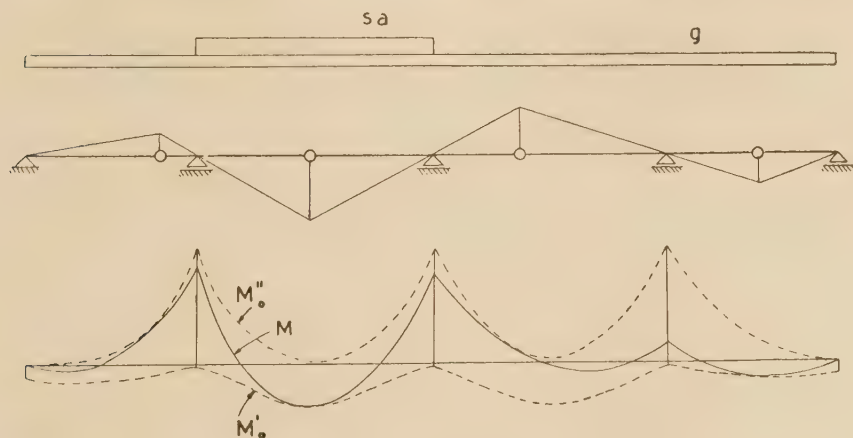



Fig. 4.

negativo il lavoro compiuto da ciascuna di esse, L_a ed L_g il lavoro di *sa* e di *g* per effetto della deformata della fig. 4.

E' pure, ovunque,

$$M''_o \leqq M \leqq M'_o \tag{10}$$

dove M sono i momenti provocati dei carichi *g* ed *sa*, e dalle coppie limiti M_{oi}.

Si varî il diagramma e di $\Delta\, e$; i momenti limiti divengono

$$\begin{aligned} M'^{*}_o &= M'_o + B\, \Delta\, e = M'_o + B\, k\, M_\Delta \\ M''^{*}_o &= M''_o + B\, \Delta\, e = M''_o + B\, k\, M_\Delta\, . \end{aligned} \tag{11}$$

Si calcoli il coefficiente γ^* cinematicamente sufficiente, relativo alla struttura così variata, ed alle cerniere della fig. 4; risulta

$$\begin{aligned} &\gamma^*\, L_a + L_g + \Sigma_i\, M^*_{oi}\, \vartheta_i = O \\ &\gamma^*\, L_a + L_g = - \Sigma_i\, M_{oi}\, \vartheta_i - B\, k\, \Sigma_i\, M_{\Delta i}\, \vartheta_i\, . \end{aligned} \tag{12}$$

Poichè le coppie $M_{\Delta i}$ sono in equilibrio, sulla struttura labile, con forze esterne nulle, è

$$\Sigma_i \, M_{\Delta i} \, \vartheta_i = 0 \; ; \tag{12}$$

dalle (9) e (12) risulta perciò $\gamma^* = s$

Il diagramma dei momenti

$$M^* = M + B \, k \, M_\Delta$$

è compatibile con le forze esterne g e $\gamma^* \, a$, poichè M è compatibile con le stesse forze, e M_Δ con forze tutte nulle. E' inoltre ovunque

$$M''^*_o \leqq M^* \leqq M'^*_o \quad ;$$

i momenti M^* attingono i valori limiti M^*_o nelle stesse sezioni (fig. 4) in cui gli M attingevano i valori limiti M_o. Può quindi dirsi che $\gamma^* = s^*$, e cioè

$$s^* = s \; ;$$

il coefficiente di sicurezza a rottura non varia perciò per effetto della trasformazione dei cavi, e non varia neppure l' ubicazione delle cerniere di snervamento.

Il teorema suddetto, intuito ma non dimostrato dallo stesso GUYON, ha ricevuto ottima conferma nel corso di esperienza seguite dal MORITZ in Inghilterra, e di cui è stata presentata relazione al recente congresso della F. I. P. ad Amsterdam.

Napoli, Istituti di Scienza delle Costruzioni e Costruzioni di Ponti.

Contributo alla determinazione del carico critico della trave a cassone

Nota del dott. **Pasquale d' Elia**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 3 dicembre 1955)

Sunto. — Si risolve il problema della determinazione del carico critico della trave a cassone soggetto a carico uniforme lungo uno spigolo, tenendo conto della presenza, lungo gli spigoli, di nodo-incastro.

Attraverso esempi numerici si pone in evidenza, per differenti rapporti altezza/base, l' incremento che il valore, così determinato, ha rispetto a quello calcolato nell' ipotesi di spigoli incernierati.

1. — L' impiego della trave a cassone, limitato fino a pochi anni or sono alle sole costruzioni aeronautiche, va, come è noto, largamente diffondendosi anche nel campo delle costruzioni civili, nel quale il sistema trova frequente applicazione quale struttura da ponte; i progressi della tecnica costruttiva del cemento armato ed il perfezionamento dei mezzi di calcolo hanno infatti consentita una larga diffusione delle cosidette « strutture in foglio » tra le quali il sistema stesso può annoverarsi.

L' arditezza raggiunta da tali strutture rende assai temibili le insidie della instabilità dell' equilibrio e pertanto una particolare importanza riveste per esse la determinazione del carico critico. A tal riguardo occorre notare che in genere il calcolo delle strutture in foglio viene eseguito, come meglio si dirà in appresso, in base ad alcune ipotesi semplificative e di esse risente quindi la determinazione anzidetta, già studiata da altri Autori [1]; trattandosi, come è logico di ipotesi a favore di stabilità, ci si mette dunque in condizioni di maggior sicurezza, ma tale situazione può determinare una eccessiva fiducia nel calcolo e quindi una minore prudenza nel fissare il coefficiente di sicurezza.

Non appare quindi inutile una maggiore investigazione del problema, avvalendosi di ipotesi più aderenti alla realtà.

2. — Il calcolo delle strutture in foglio viene generalmente eseguito in base alle seguenti ipotesi:

a) attitudine delle lastre che costituiscono la struttura a reagire, nel proprio piano, come travi;

---

[1]) V. bibl. [7] e [10].

b) incapacità delle lastre stesse, attesa la loro sottigliezza, a reagire normalmente al loro piano;

c) possibilità di scomporre le forze, che si considerano agenti lungo gli spigoli e normalmente agli spigoli stessi, in componenti agenti nel piano delle lastre;

d) azione mutua tra le varie lastre ridotta a soli sforzi di taglio, lungo lo spigolo comune.

In tale modo viene trascurata la resistenza che le lastre oppongono ad inflettersi fuori del proprio piano in senso trasversale e non si tien conto della congruenza del sistema effettivo, nel quale, per la presenza di nodi incastro lungo gli spigoli, non è consentita la rotazione relativa tra i fogli che concorrono negli spigoli stessi.

Se indichiamo con

p_i il carico per unità di lunghezza, uniformemente distribuito lungo lo spigolo i della struttura, positivo se diretto nel senso della numerazione crescente degli spigoli

T_i gli sforzi di taglio, per unità di lunghezza, che si esercitano lungo lo

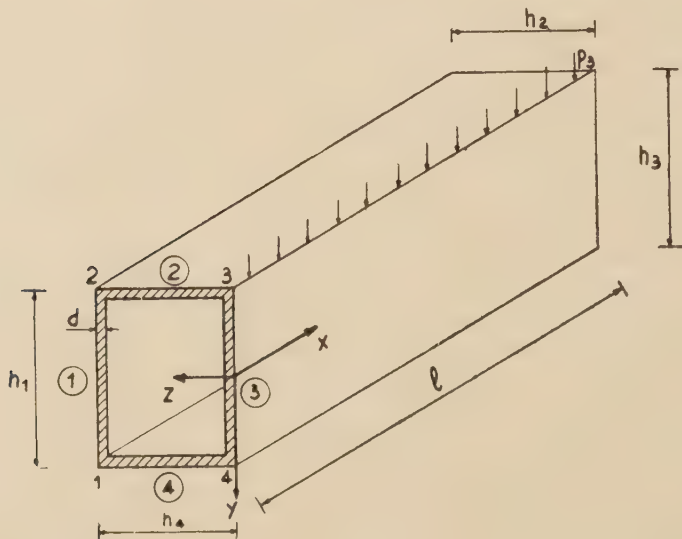



Fig. 1.

spigolo i tra i fogli $i-1$ ed i, positivi se provocano tensione nel foglio $i-1)$ - mo e compressione nel foglio i - mo

la nota equazione dei tre tagli fornisce, [2]) con riferimento alla fig. 1:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
T'_1 &= C_1\, p_1 + C_4\, p_2 + C_2\, p_3 + C_3\, p_4 \\
T'_2 &= C_1\, p_1 + C_3\, p_2 + C_2\, p_3 + C_4\, p_4 \\
T'_3 &= C_2\, p_1 + C_3\, p_2 + C_1\, p_3 + C_4\, p_4 \\
T'_4 &= C_2\, p_1 + C_4\, p_2 + C_1\, p_3 + C_3\, p_4
\end{aligned}
$$

essendo

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{h_2}{h_1}\,\frac{2h_1 + 3h_2}{(h_1+h_2)\,(3h_2+h_1)}\ ;\quad C_2 = -\frac{h_2}{(h_1+h_2)\,(3h_2+h_1)} \\
C_3 &= \frac{h_1}{h_2}\,\frac{2h_2 + 3h_1}{(h_1+h_2)\,(3h_1+h_2)}\ ;\quad C_4 = -\frac{h_4}{(h_1+h_2)\,(3h_1+h_2)}
\end{aligned}
$$

ed avendo contrassegnato con apice l' operazione di derivazione rispetto ad x.

In un recente studio [3]), rimosse le ipotesi di cui alle lettere *b)* e *c)*, e tenuto presente che la rotazione relativa tra i fogli deve essere nulla, vien data l' espressione dei momenti flettenti trasversali che, lungo gli spigoli, si esercitano alle .estremità dei fogli stessi. In particolare, se il vincolo in ciascun estremo della trave (timpano) è incapace di reagire a forze normali al proprio piano, si ha, quando agisce il solo carico p_i lungo lo spigolo i-mo

$$
(3)\qquad m_{i,j}\,(x) = p_i\,[K_1\,\mathrm{sen}\,\alpha x\,\mathrm{Cosh}\,\alpha x + K_2\cos\alpha x\,\mathrm{Senh}\,\alpha x + K_3\cos\alpha x\,\mathrm{Cosh}\,\alpha x + K_4]
$$

In questa espressione

$m_{i,j}(x)$ rappresenta il valore, per unità di lunghezza, del momento flettente trasversale sullo spigolo j — mo, positivo se provoca trazione nelle fibre interne del cassone; ammesso che possano trascurarsi le variazioni di lunghezza dei lati della sezione trasversale, i momenti $m_{i,j}\,(x)$, provocati nei quattro spigoli dal carico p_i, risultano eguali tra loro per gli spigoli disposti lungo le diagonali del cassone ed eguali e di segno contrario per due spigoli adiacenti

---

[2]) V. bibl. [3].

[3]) V. bibl. [3].

K_1 e K_2 sono costanti che si determinano in base alle condizioni

$$m_{i,j}(x) = m_{i,j}''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = l$$

$$K_4 = - K_3 = - \frac{h_{i+1}}{16}$$

$\alpha = \sqrt[4]{48\, d^2 / h_1^2\, h_2^2\, (h_1 + h_2)^2}$, essendo d lo spessore, ritenuto costante, dei fogli.

Per il carico p_i si avranno dunque, lungo gli spigoli, i momenti rap-

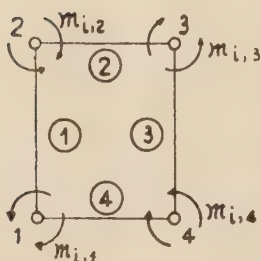
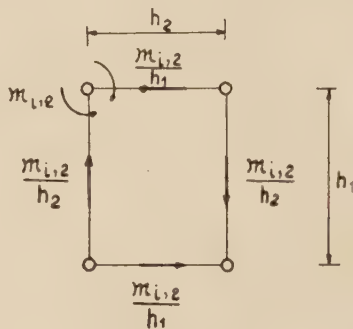



Fig. 2. Fig. 3.

presentati nella fig. 2, per i quali, come si è detto, valgono le eguaglianze

$$m_{i,1} = m_{i,3} = - m_{i,2} = - m_{i,4}\,. \tag{4}$$

E' opportuno ora rilevare che ciascuno di tali momenti determina nelle quattro lastre (v. fig. 3), i carichi

$$p_1^* = p_3^* = \frac{m_{i,j}}{h_2}$$

$$p_2^* = p_4^* = - \frac{m_{i,j}}{h_1}$$

e pertanto, tenuto conto delle (4), si avrà, per i quattro momenti $m_{i,j}$, dovuti al carico p_i:

$$\begin{aligned} p_1^* = p_3^* &= \frac{4m_{i,j}}{h_2} \\ p_2^* = p_4^* &= - \frac{4m_{i,j}}{h_1}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Utilizzando le (1) e (2) potremo quindi scrivere, per gli sforzi tangenziali $T_{i,j}^*$, dovuti ai momenti $m_{i,j}$

$$(6) \qquad T_{i,j}^{*\prime}(x) = \frac{4(h_2 - h_1)}{h_1 h_2 (h_1 + h_2)} m_{i,j}(x)$$

notando che vale, per i $T_{i,j}^{*\prime}(x)$, una relazione analoga alla (4).

In definitiva, dunque, assunto come schema della struttura quello costituito dalle lastre incernierate, agiranno su di essa le seguenti forze:

a) carichi esterni p_i agenti nei piani delle lastre, che danno luogo a sforzi di taglio T_i lungo gli spigoli, per i quali valgono le (1); questo sistema di forze noi chiameremo « principale », in relazione alle ipotesi semplificative che lo caratterizzano;

b) momenti flettenti trasversali $m_{i,j}(x)$, forniti dalla (3), che danno luogo ai carichi p^*, dati dalle (5), ed a sforzi di taglio $T_{i,j}^*(x)$, per i quali valgono le (6). I momenti $m_{i,j}(x)$, i carichi p^* e gli sforzi di taglio $T_{i,j}^*(x)$, costituiscono il sistema di forze che diremo « secondario ».

3. Prima di affrontare il problema della determinazione del carico critico, è necessario soffermarci brevemente sulle relazioni che legano tra loro gli spostamenti dei vari fogli.

Indichiamo, per il foglio i-mo, con v_i la componente dello spostamento in direzione parallela alla sua traccia (che ammetteremo eguale per tutti i punti dello stesso foglio) e con $w_{i,i}$ e $w_{i,i+1}$ le componenti, in direzione normale alla traccia stessa, dello spostamento dei suoi spigoli i ed $i+1$, assumendo per v, quale verso positivo, quello stesso già detto per p_i e per w quello corrispondente ad uno spostamento verso l'interno del cassone. La rotazione β_i della traccia del foglio i-mo è

$$\beta_i = \frac{w_{i,i+1} - w_{i,i}}{h_i}$$

e, per la congruenza del sistema, posto

$$w_i = \frac{w_{i,i} + w_{i,i+1}}{2}$$

deve essere

$$(7) \qquad w_{i,i} = - v_{i-1}, \quad w_{i,i+1} = v_{i+1}, \quad w_i + \frac{\beta_i h_i}{2} = - w_{i+2} + \frac{\beta_{i+2} h_{i+2}}{2}.$$

4. Per la determinazione del carico critico ci si è avvalsi del metodo energetico, nello spirito del teorema di Dirichlet; il procedimento che occorre seguire è ben noto e pertanto ne faremo un cenno assai breve.

Se, partendo da una configurazione di equilibrio stabile del sistema, imprimiamo al sistema stesso uno spostamento compatibile con i vincoli, la variazione $\Delta_2 E$ dell' energia potenziale totale, calcolata tenendo conto delle componenti del secondo ordine della deformazione e dello spostamento, e cioè la variazione seconda dell' energia, deve soddisfare una condizione di minimo, e pertanto deve aversi $\delta (\Delta_2 E) > 0$; l' equazione $\delta (\Delta_2 E) = 0$ caratterizza quindi la condizione di equilibrio indifferente, soglia della instabilità.

Lo spostamento impresso viene definito attraverso n parametri incogniti a_i e potrà quindi scriversi

$$\frac{\partial (\Delta_2 E)}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1 \ldots\ldots n) \tag{8}$$

Detta Φ la energia elastica del sistema, corrispondente alla deformazione impressa, L_2 e $- L_2'$ i lavori del secondo ordine delle componenti di tensione e dei carichi esterni, si ha

$$\Delta_2 E = \Phi + L_2 - L_2'$$

e pertanto $\Delta_2 E$ risulta una forma quadratica dei parametri incogniti; le (8) costituiscono quindi un sistema di n equazioni lineari omogenee dei parametri stessi. La condizione di compatibilità di tale sistema è rappresentata dall' annullarsi del determinante dei coefficienti; poichè tra questi compaiono i carichi assegnati, si perviene, in definitiva, ad una equazione di grado n nei carichi.

Le radici di questa equazione rappresentano dunque i valori dei carichi corrispondenti all' equilibrio indifferente e cioè i valori critici cercati: la più piccola delle radici è quella che praticamente interessa.

5. — Prima di particolarizzare il problema in relazione allo schema di carico da noi studiato, vogliamo calcolare, per il foglio i, le espressioni dell' energia potenziale elastica e dei lavori sviluppati dagli sforzi interni e dai carichi esterni.

Va innanzi tutto rilevato che il lavoro svolto dai carichi esterni è nullo. Ricordiamo, infatti, (v. n. 3), che essi sono costituiti da carichi nel piano del foglio, paralleli all' asse y, da sforzi tangenziali lungo i bordi e da momenti flettenti trasversali, agenti parallelamente al piano yz; i primi, senza errore apprezzabile [4]), possono ritenersi applicati nel baricentro della sezione trasversale e pertanto risulta nullo il lavoro da essi svolto, i secondi hanno una distribuzione emisimmetrica e quindi, per una deformazione simmetrica, forniscono un lavoro egualmente nullo, i momenti,

---

[4]) V. bibl. [8].

infine, non danno luogo a lavoro del secondo ordine poichè agiscono proprio nei piani in cui si manifesta la instabilità [5].

Il lavoro degli sforzi interni è dato da

$$(9) \qquad L_2 = \int_V \varepsilon_x^{(2)} \sigma_x \, dV + \int_V \gamma_{xy}^{(2)} \tau_{xy} \, dV$$

Stabilito che lo spostamento impresso sia costituito da una rotazione intorno all' asse x e da una traslazione nella direzione dell'asse z, sarà [6]):

$$(10) \qquad u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = (w_i + \beta_i \, y) \text{ sen } \frac{\pi x}{l}$$

Le uniche componenti del 2° ordine della deformazione che compaiono nella (9) sono $\varepsilon_x^{(2)}$ e $\gamma_{xy}^{(2)}$; esse hanno [7]) le seguenti espressioni :

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x}$$

e quindi, per i valori di u, v, w, dati dalle (10), si ha

$$(11) \qquad \begin{aligned} \varepsilon_x^{(2)} &= \frac{\pi^2}{2l^2} (w_i + \beta_i y)^2 \cos \frac{2\pi x}{l} \\ \gamma_{xy}^{(2)} &= \frac{\pi}{2\,l} \beta_i (w_i + \beta_i y) \text{ sen } \frac{2\,\pi\,x}{l} \end{aligned}$$

Scriviamo ora le espressioni di σ_x e di τ_{yx}.

Per i carichi agenti nel piano del foglio paralleli all' asse y si ha,

---

[5]) Tale considerazione riveste carattere generale. Si pensi ad es. ad una trave appoggiata, soggetta a carichi trasversali ed a forze assiali: il carico critico non dipende dai primi e pertanto il lavoro del 2° ordine da esso fornito non può che essere nullo.

[6]) In effetti risulta $v = \beta^2_i \, y$ e v è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a w; è lecito quindi trascurarlo, per semplicità di calcolo

[7]) V. bibl. [2].

dette M, N e T le caratteristiche della sollecitazione:

$$\sigma_x = -\frac{My}{I_z} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{T}{2 I_z}\left(\frac{h^2_i}{4} - y^2\right) \tag{12}$$

mentre, per gli sforzi tangenziali lungo i bordi, risulta

$$\sigma_x = \frac{N}{A} - \frac{My}{I_z} \quad , \quad \tau_{xy} = 0 \,. \tag{13}$$

Per quanto riguarda, infine, la energia elastica si ha [8]):

$$\Phi = \frac{B\,\pi^4}{4\,l^3}\, w_i^2 + C\,\frac{\pi^2}{4\,l}\,\beta^2_i \tag{14}$$

essendo B la rigidità flessionale EI_y relativa all' asse y e C la rigidità torsionale che, attesa la sottigliezza dei fogli, è data da

$$0{,}333\ G\, d^3\, h_i \,.$$

6. — Lo schema di carico da noi esaminato è costituito da un carico uniformemente distribuito lungo lo spigolo $(i + 1)$ diretto da $(i + 1)$ ad i, di intensità unitaria $p_i + 1$.

Allo scopo di istituire un confronto tra il carico critico relativo al cassone con spigoli incernierati e quello con nodi-incastro, manterremo distinto il calcolo dei lavori del secondo ordine degli sforzi interni dovuto al sistema « principale » ed a quello « sussidiario » (v. n. 2); in entrambi i casi il lavoro delle forze esterne può porsi, come si è visto al n. 5, eguale a zero, mentre l' energia elastica è, naturalmente, la stessa.

a) lavoro degli sforzi interni relativi al sistema principale.

Lo schema da considerare è quello delle fig. 4 e 6. Per il primo si ha, relativamente al foglio i:

$$\begin{aligned} N(x) &= 0 \\ T(x) &= p_{i+1}\left(\frac{l}{2} \quad x\right) \\ M(x) &= \frac{p_{i+1}}{2}\,(l\,x - x^2) \end{aligned} \tag{15}$$

---

[8]) V. bibl: [5].

e per il secondo

$$N(x) = \int_0^x (T_{i+1} - T_i)\, dx$$

$$(16) \qquad T(x) = 0$$

$$M(x) = -\frac{h_i}{2} \int_0^x (T_{i+1} + T_i)\, dx$$

La (1) e (2) consentono di determinare i valori di T'_i e T'_{i+1} che brevemente indicheremo con α_i ed α_{i+1}; mediante le (9), (11), (12) e (13) è pos-

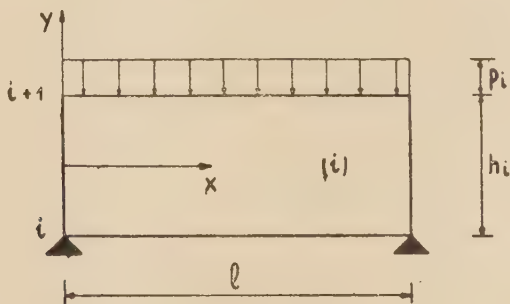



Fig. 4.

sibile allora, con facili sviluppi, ottenere per il lavoro del foglio i la seguente espressione:

$$(17) \qquad \begin{aligned}(L_2)_i = -\beta_i w_i \left[p_i \frac{\pi^2+3}{24} l + \frac{\pi^2-3}{48} (\alpha_i + \alpha_{i+1}) l h_i \right] + \\ + (w_i^2 + \beta_i^2 \rho_i^2) \frac{\pi^2-3}{48} l(\alpha_i - \alpha_{i+1})\end{aligned}$$

avendo indicato con ρ_i il raggio di inerzia relativo all' asse z.

La (17) fornisce pure il lavoro degli altri tre fogli, quando, naturalmente, si ponga $p_i = 0$; la somma dei quattro lavori fornirà il lavoro totale del sistema.

b) lavoro degli sforzi interni relativi al sistema secondario.

Gli schemi da considerare sono quelli delle fig. 5 e 6, avendo presente che ora i fogli del cassone sono tutti caricati dai p_i^* [v. le (5)]; variabili con la legge indicata dalla (3), e che per i tagli lungo gli spigoli di ciascun foglio occorrerà riferirsi alla (6).

Posto $m_{i,j} = p_i \; \varphi(x)$, le (5) assumono l'espressione

$$p_i^* = \mu_i \; \varphi(x)$$

con evidente significato dei simboli. In luogo delle (15) potremo allora scrivere per i carichi p_i^*

$$(15)' \qquad \begin{aligned} N(x) &= 0 \\ T(x) &= \mu_i \int_x^{l/2} \varphi(x) \, dx \\ M(x) &= \int_0^x T(x) \, dx = \mu_i \int_0^x dx \int_x^{l/2} \varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (12) i valori (15)' e opportunamente semplificando si ottiene, per il lavoro del 2° ordine dovuto ai p_i^*:

$$(18) \quad (L_2)_i = - \frac{\pi^2 \, w_i \, \beta_i}{2 \, l^2} \mu_i \left[\int_0^l M(x) \, dx - \int_0^l M(x) \cos \frac{2 \pi x}{l} \, dx \right].$$

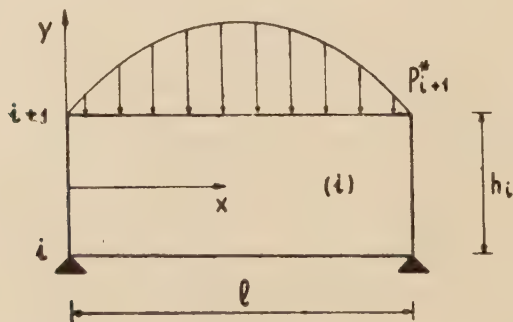



Fig. 5.

Il calcolo del primo integrale che compare nella (18) dà:

$$\int_0^l M(x) \, dx = \mu_i \int_0^l dx \int_0^x dx \int_x^{l/2} \varphi(x) \, dx =$$

$$= \mu_i \left| \frac{K_2 - K_1}{4 \, \alpha^3} \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{Senh} \alpha x - \frac{K_1 + K_2}{4 \, \alpha^3} \cos \alpha x \operatorname{Cosh} \alpha x + \right.$$

$$\left. + \frac{K_3}{4\alpha^3} \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{Cosh} \alpha x - \frac{K_3}{4\alpha^3} \cos \alpha x \operatorname{Senh} \alpha x + \frac{K_4}{6} x^3 - K_5 \, x^2 \right|,$$

essendo $K_1 \ldots K_4$ le costanti che compaiono nella (3) e $K_5 = \frac{1}{2}\, T\left(\frac{l}{2}\right)$, ossia eguale alla metà che il taglio dovuto al carico p_i^* assume in mezzeria e che va calcolato mediante la seconda delle (15)'.

Allo scopo di facilitare il calcolo del secondo integrale della (18), ri-

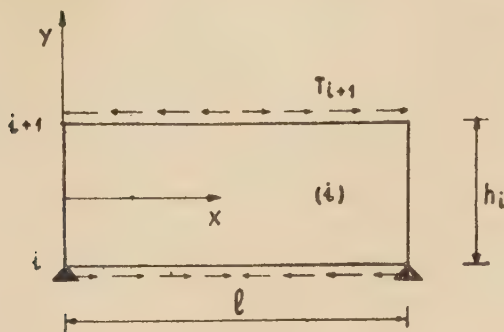



Fig. 6.

portiamo in nota [9] lo sviluppo di alcune espressioni che compaiono nel calcolo stesso.

Per quanto ha riferimento al lavoro degli sforzi interni dovuti allo schema della fig. 6, notiamo, in primo luogo, che la (6) può porsi sotto la forma

$$T_{i,j}^{*\prime} = \mu_t \, p_i \, \varphi(x).$$

Il calcolo, attraverso le (16), delle caratteristiche della sollecitazione

---

(9) $$\int \text{sen}\, \alpha x \cos \beta x \;\text{Cos h}\alpha x = -\,\text{Cos h}\alpha x \left[\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{2(\alpha+\beta)} + \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{2(\alpha-\beta)}\right] +$$

$$+ \frac{\alpha}{2(\alpha+\beta)^3 + 2\alpha^2(\alpha+\beta)} \Big[\alpha \cos(\alpha+\beta)x \;\text{Cosh}\, \alpha x +$$

$$+ (\alpha+\beta)\, \text{sen}(\alpha+\beta)x \;\text{Senh}\, \alpha x \Big] + \frac{\alpha}{2(\alpha-\beta)^3 + 2\alpha^2(\alpha-\beta)} \Big[\alpha \cos(\alpha-\beta)x \;\text{Cos h}\alpha x +$$

$$+ (\alpha-\beta)\, \text{sen}(\alpha-\beta)\, x \;\text{Senh}\, \alpha x\Big].$$

$\int \text{sen}\, \alpha x \cos \beta x \;\text{Senh}\, \alpha x$: nella espressione precedente occorre scambiare tra loro Senh αx e Cosh αx.

$\int \cos \alpha x \cos \beta x \;\text{Senh}\, \alpha x$; nella espressione precedente occorre scambiare tra loro $\cos(\alpha+\beta)x$ e $\text{sen}(\alpha-\beta)x$, $\cos(\alpha-\beta)x$ e $\text{sen}(\alpha-\beta)x$, e sostituire $-$ Sen hαx a Cos hαx.

e l' utilizzazione delle (11) e (13), conduce per il lavoro relativo al foglio i all' espressione

$$(19) \quad (L_2)_i = \frac{\pi^2 w_i \beta_i}{2 l^2} h_i \mu_i \left| \int_0^l M(x)\, dx + \int_0^l M(x) \cos \frac{2 \pi x}{l} dx \right|$$

nella quale compaiono gli stessi integrali della (18).

In definitiva, quindi, la variazione seconda dell' energia potenziale totale del sistema sarà data, nella ipotesi di cerniere lungo gli spigoli, dalla somma delle (14) e (17) estesa ai quattro fogli; aggiungendo ad essa le (18) e (19) si ottiene la variazione seconda nell' ipotesi di nodi-incastro.

Nota $\Delta_2 E$ occorre seguire il procedimento già indicato al n. 4; nel nostro caso risulta $n = 8$, ma l' equazione determinatrice del carico critico p_i risulterà di sesto grado attese le due relazioni che è possibile scrivere, in conformità dell' ultima delle (7).

7. Allo scopo di meglio renderci conto dei risultati ottenuti e di investigare sulla influenza che esercita il rapporto h_1/h_2, il procedimento esposto è stato applicato ad esempi concreti e precisamente a tre travi a cassone in calcestruzzo cementizio di luce m. 20, spessore 0,10, altezza m. 2,00: per le basi sono stati presi i valori 4 m., 2 m., 1 m. e pertanto il rapporto h_1/h_2 ha assunto, rispettivameate, i valori 0,50, 1, 2. Nella ipotesi di un carico uniformemente distribuito lungo lo spigolo 2 diretto dall'alto in basso, posto E = 200.000 kg/cmq. e, come è lecito per sezioni sottili in calcestruzzo, C =2B, i valori del carico critico sono risultati i seguenti:

h_1/h_2	cerniere lungo gli spigoli [10])	incastri lungo gli spigoli
0,5	1,85 t/ml	2,02 t/ml
1	1,95 »	2,30 »
2	2,09 »	2,56 »

Gli aumenti percentuali del valore del carico critico sono riportati nella fig. 7; essi confermano quanto era lecito attendersi circa il loro an-

[10]) I risultati ottenuti sono pienamente ammissibili, ove si consideri che per una trave delle dimensioni del foglio 1, appoggiata agli estremi e caricata uniformemente, il carico critico risulta di 1,70 t/ml.

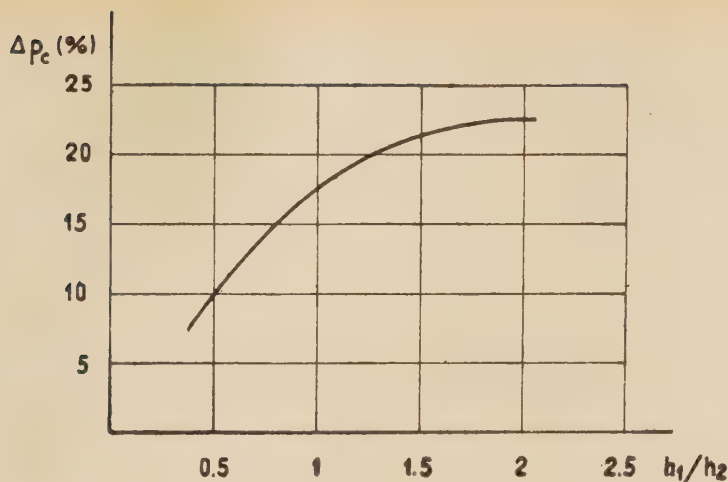



Fig. 7.

damento in funzione del rapporto h_1/h_2 e danno la possibilità di valutare il grado di esattezza del metodo appossimato di calcolo.

Istituto di Scienza delle Costruzioni dellà Facoltà di Ingegneria della Università. Napoli, ottobre 1955.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Galli. *Lezioni di Scienza delle Costruzioni.* Pellerano, Napoli, 1953.
[2] A. Galli. *Complementi analitici utili per la trattazione effettiva dei problemi di stabilità dell'equilibrio elastico.* Rend. Mat. della R. Università di Roma, Vol. 43, 1942.
[3] A. Galli e F. Mazzarella. *Sul calcolo della trave a cassone a sezione rettangolare.* Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Napoli, 1950.
[4] V. W. Flügge. *Statik und Dynamik der Schalen.* Springer. Berlin, 1937.
[5] V. Franciosi. *L'instabilità flesso-torsionale nelle travi alte in conglomerato precompresso.* Giornale del G. C., aprile 1953.
[6] E. Giangreco. *Instabilità dell'equilibrio delle strutture scatolari.* Rend. Acc. Scienze fis. e mat. della Soc. Naz. di Scienze, Lettere ed Arti in Napoli, Serie 4, Vol. XVII, 1950.
[7] E. Giangreco. *Instabilité de l'équilibre des voûtes polygonales.* Association Internationale des Ponts et Charpentes, Memoires. Zürich, 1953.
[8] E. Giangreco. *Statica e stabilità delle strutture scatolari precompresse.* Giornale del G. C., Giugno 1954.
[9] G. Krall. *Questioni di matematica applicata.* Bologna, Zanichelli, 1939.
[10] A. Raithel e G. Nicolosi. *La instabilità dell'equilibrio delle strutture in foglio.* Atti della Fondazione Politecnica, Napoli, 1953.
[11] V. S. Timoshenko. *Theory of elastic stability.* Mc Graw Hill Book Company, New York, 1936.

Sul calcolo a rottura di strutture in conglomerato precompresso, per flessione e sforzo assiale coesistenti.

Nota del dott. **Eugenio Bruzzese**, *presentata dal socio* **A. Galli**

(Adunanza del dì 3 dicembre 1955)

Sunto. — Si fornisce la relazione che lega momento flettente e sforzo normale in condizioni di plasticizzazione totale, con riferimento ad una sezione rettangolare in conglomerato precompresso. Si ricava una proprietà dei dominî di snervamento, relativi al caso esaminato, che ne rende immediato il tracciamento al variare dei parametri della coazione impressa. Discussi alcuni casi particolari, si mostra la validità del procedimento per sezioni qualsiasi purchè simmetriche rispetto alla verticale baricentrica.

In tema di calcolo a rottura non è parso inopportuno fornire gli elementi necessari, nell' ambito della pratica tecnica, al tracciamento dei dominî M, N, di snervamento relativi alle sezioni in conglomerato precompresso. Le formule cui si è pervenuti sono state tratte nella duplice ipotesi di snervamento totale dell' acciaio e di diagramma tensionale rettangolare nel conglomerato; si ritorna alle formule note del Guyon [3] annullando il termine sforzo normale.

Le due ipotesi cui si è accennato, accettate con molta prudenza dal tecnico nel caso del cemento armato ordinario [1], [2], [9] si dimostrano ben più aderenti al vero nel caso del conglomerato precompresso, come risulta da recentissime esperienze condotte in Olanda su modello al vero degli elementi tipo del ponte « Klaprozenbrug » ad Amsterdam, [4], [5] ed in Inghilterra su travi sperimentali a due luci [6]. La necessità di approntare i dominî M, N, trattati in questa nota, appare evidente per quelle strutture, specialmente da ponte, nelle quali non sia più trascurabile la caratteristica di sforzo assiale N per rispetto a quella flessionale M [7]: arco-telai, ponti bow-string ad impalcato catena, del tipo Nielsen o Langer, sono strutture nelle quali la caratteristica assiale prepondera accanto a quella flessionale, e nello stesso tempo esaltano le proprie caratteristiche funzionali avvalendosi della precompressione. Anche per gli archi incastrati, la cui tecnica esecutiva è, più che per ogni altra struttura, ancorata alle vie classiche, possono ottenersi notevoli vantaggi sfruttando il sistema delle coazioni impresse tramite armature pre-tese; proprio per questo tipo di strutture, come in seguito si dirà, fissando i parametri di precompressione nel modo più adatto al tipo di struttura, si giunge ad un do-

minio di snervamento che consente una particolare interpretazione degli effetti della precompressione in fase di rottura.

Il procedimento seguito in questa nota è relativo alle strutture a cavi aderenti. Dal punto di vista del « limit design », per cui la formazione delle cerniere plastiche è legata soltanto alle caratteristiche fisico-geometriche della struttura e non dipende da eventuali stati tensionali preesistenti [1]), il dominio relativo alle stutture in esame coincide con quello che si otterrebbe per strutture in cemento armato ordinario a semplice armatura, con basse percentuali di acciaio ad elevato limite elastico e con altezza utile non legata alle posizioni usuali dell' armatura, pertanto comunque variabile. Se ne deduce che il coefficiente di sicurezza relativo a strutture usuali è più elevato di quello caratteristico delle corrispondenti in precompresso, tenendo conto che il rapporto tra le aree metalliche è ben più elevato di quello degli inversi delle corrispondenti tensioni limiti.

Si pone in rilievo la circostanza, particolarmente utile sul piano della applicazione tecnica, per cui la curvatura del dominio di snervamento è indipendente sia dall' area metallica di pretensione che dalla eccentricità dei cavi, essendo legata a questi parametri soltanto la scelta del sistema di assi di riferimento. Ne consegue che, a parità di sezione, è sufficiente tracciare una volta sola le curve che delimitano il dominio stesso ; si terrà poi conto dei parametri di precompressione, attuando una semplice traslazione del riferimento cartesiano.

2) *La relazione tra* M *e* N *nel caso della sezione rettangolare.*

Assegnata la sezione rettangolare di dimensioni b ed h, si consideri l' armatura A_f di precompressione concentrata nel baricentro C dei cavi. Sia e la distanza di C dal baricentro G della sezione, considerata positiva se il cavo risultante è situato al disotto di G. In condizioni di completa plasticizzazione dell' acciaio e del conglomerato, il diagramma delle tensioni è, per momento flettente positivo, quello segnato nella fig. 1, con tensioni nel conglomerato pari a quella limite σ_{oc} se di compressione, nulle se di trazione [2]). La tensione nell' acciaio è quella limite σ_{of}.

---

[1]) Ad esempio in un ponte Africa lo stato di coazione esistente nella volta di intradosso per le precedenti vicissitudini collegate alla tecnica esecutiva, non prende parte al meccanismo del calcolo a rottura che, in definitiva, fornisce un coefficiente di sicurezza identico a quello di un ponte Risorgimento delle stesse dimensioni [8].

[2]) Il momento flettente è positivo se tende le fibre inferiori. Sforzo normale e tensioni sono negativi se di compressione.

Le equazioni di equilibrio alla traslazione, lungo la normale alla sezione, ed alla rotazione si scrivono [1]:

(1) $$N = \sigma_{oc}\, b\, d + \sigma_{of}\, A_f$$

(2) $$M^+ = -\sigma_{oc}\, b\, d\, \frac{h - d}{2} + \sigma_{of}\, A_f\, e$$

dove d rappresenta l' altezza della zona di conglomerato plasticizzata [2]).

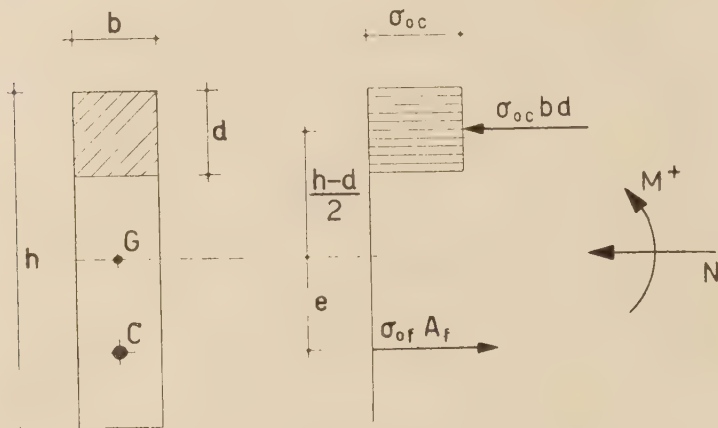



Fig. 1.

Dalla (1) si ricava:

(3) $$d = \frac{N - \sigma_{of}\, A}{\sigma_{oc}\, b}$$

che, sostituita nella (2), fornisce la relazione che lega M e N in condizioni di plasticizzazione totale.

---

[1]) Nella fig. 1 lo sforzo normale, che accompagna il momento flettente positivo, è di compressione, quindi negativo. Le equazioni di equilibrio (1), (2) restano immutate se, fermo restando il verso positivo di M, lo sforzo normale è di trazione.

[2]) Occorre tener presente che le (1) e (2), come tutte le espressioni riportate in seguito, sono scritte tenendo conto del segno che compete alle tensioni. Così il termine $\sigma_{oc}\, b\, d$ della (1), è in realtà negativo, mentre il corrispondente termine della (2) è positivo. In tal modo le (1) e (2) e le altre che seguono, forniscono le caratteristiche M, N col segno che ad esse compete.

Si ha:

$$M^+ = \frac{\sigma_{oc}\, b}{2}\,(d^2 - d\,h) + \sigma_{of}\, A_f\, e =$$

$$= \frac{\sigma_{oc}\, b}{2}\left[\frac{(N - \sigma_{of}\, A_f)^2}{\sigma_{oc}^2\, b^2} - h\,\frac{N - \sigma_{of}\, A_f}{\sigma_{oc}\, b}\right] + \sigma_{of}\, A_f\, e$$

Indicando con N_{oc} la quantità $\sigma_{oc}\, b\, h$

$$M^+ = \frac{h}{2}\left[\frac{(N - \sigma_{of}\, A_f)^2}{N_{oc}} - (N - \sigma_{of}\, A_f)\right] + \sigma_{of}\, A_f\, e \tag{4}$$

Se il momento flettente è negativo, (fig. 2), la (2) si modifica nella seguente:

$$M = \sigma_{oc}\, b\, d\,\frac{h - d}{2} + \sigma_{of}\, A_f\, e \tag{5}$$

dalla quale, ancora per la (3),

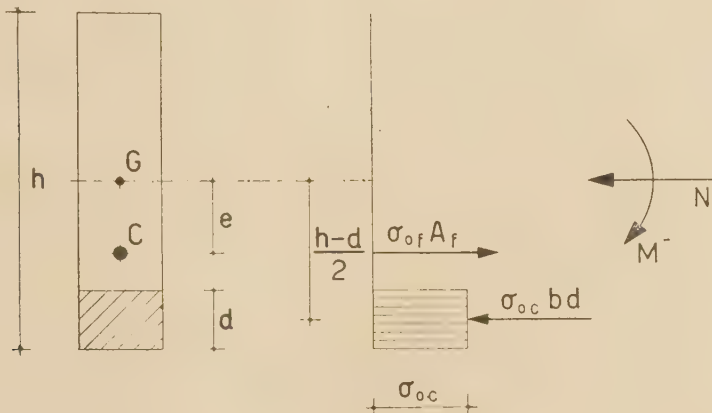



Fig. 2.

$$M^- = -\frac{h}{2}\left[\frac{(N - \sigma_{of}\, A_f)^2}{N_{oc}} - (N - \sigma_{of}\, A_f)\right] + \sigma_{of}\, A_f\, e \tag{6}$$

Si ponga ora

$$\begin{aligned} x &= N - \sigma_o\, A \\ y &= M - \sigma_{of}\, A_f\, e \end{aligned} \tag{7}$$

Sostituendo nella (4) si ha

$$y = \frac{h}{2}\left(\frac{x^2}{N_{oc}} - x\right) \tag{8}$$

Analogamente dalla (6), con le stesse posizioni (7), si ottiene, nel caso di momento negativo,

$$y = -\frac{h}{2}\left(\frac{x^2}{N_{oc}} - x\right) \tag{9}$$

Le espressioni (8) e (9) sono invarianti rispetto ad A, ed e. Esse rappresentano due archi di parabola tali che per $x = O$, e $x = x_o = N_{oc}$, si ha $y = O$. Le ascisse alle quali dette funzioni diventano stazionarie si traggono dalla $\frac{dy}{dx} = O$; si ricava per entrambe $x^* = \frac{N_{oc}}{2}$ e quindi:

$$y_{max} = -\frac{h\,N_{oc}}{8} = -\frac{\sigma_{oc}\,b\,h^2}{8}$$

$$y_{min} = \frac{h\,N_{oc}}{8} = \frac{\sigma_{oc}\,b\,h^2}{8}$$

Pertanto, in un riferimento cartesiano, i rami di parabola definiti dalle (8), (9) si rappresentano come in fig. 3; da questo diagramma si passa a quello che fornisce il cercato dominio M, N, attraverso la trasformazione

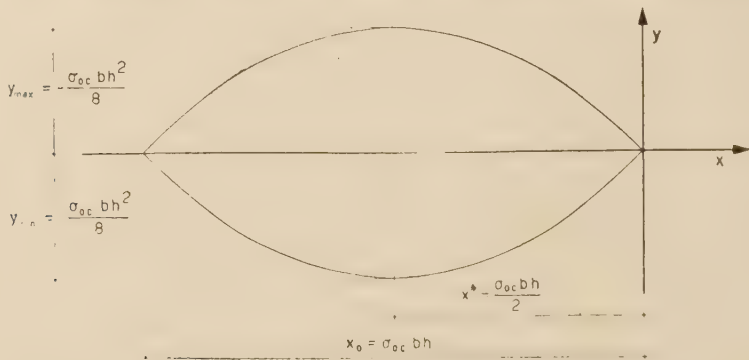



Fig. 3.

inversa di quella espressa dalle (7) e cioè (fig. 4) operando la traslazione definita dalle due componenti

$$\begin{aligned} x_T &= -\sigma_{of}\,A_f \\ y_T &= -\sigma_{of}\,A_f\,e \end{aligned} \tag{10}$$

La precompressione è caratterizzata dai due parametri eccentricità del cavo risultante e sforzo di pretensione che, in fase di completa plasticiz-

zazione, e nello spirito del « limit design » cede il posto alla sola armatura di pretensione A_f: questi due parametri non compaiono nelle espres-

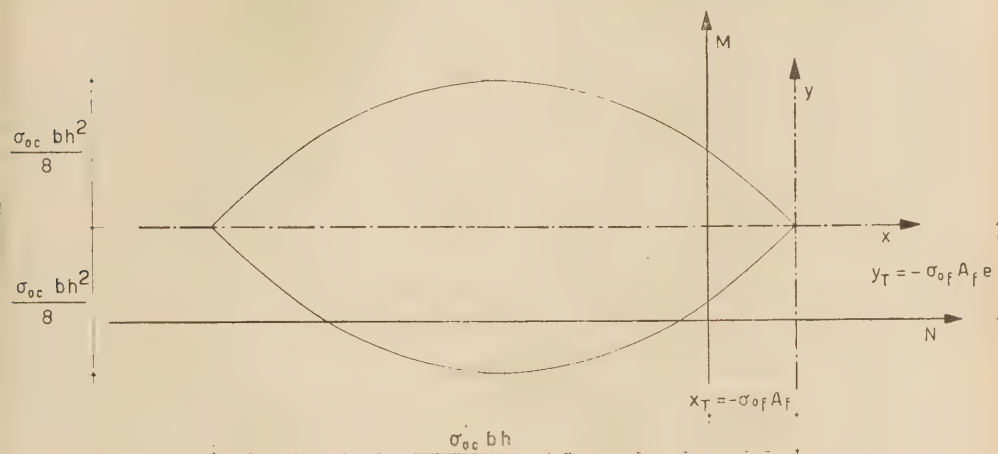



Fig. 4.

sioni (8), (9) che definiscono la forma del dominio di snervamento, ma soltanto nella trasformazione inversa della (7) che stabilisce il sistema di assi.

Si può quindi dedurre: « con riferimento allo stato limite corrispondente alla fase di rottura ed a parità di materiali, quindi per fissati valori di σ_{oc} e σ_{of}, la precompressione lascia invariati i due rami di parabola che delimitano il dominio di snervamento, facendo solo traslare questo ultimo nel piano M, N » [1]).

Si ritornerà su questa proprietà ponendola in evidenza con l'esame di alcuni casi particolari.

[1]) I risultati ottenuti derivano dalla ipotesi che l' armatura sia plasticizzata a trazione; si suppone quindi che la zona di calcestruzzo plasticizzata a compressione possa al massimo raggiungere, senza includerlo, il ferro teso. Ciò equivale a porre per d le seguenti limitazioni (figg. 1, 2):

$$\text{per } M > 0 \qquad d \leq \frac{h}{2} + e$$

$$\text{per } M < 0 \qquad d \leq \frac{h}{2} - e$$

Ponendo nelle (4) e (6) $N = O$ si ottengono i punti di intersezione del dominio con l' asse M (fig. 5)

$$M'_o = \frac{h}{2} \left(\frac{\sigma_{of}^2 A^2}{N_{oc}} + \sigma_{of} A_f \right) + \sigma_{of} A_f e$$

dalla quale:

$$(4') \qquad M'_o = \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} + e + \frac{\sigma_{of} A}{2 \sigma_{oc} b} \right)$$

Analogamente:

$$(6') \qquad M''_o = - \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} - e + \frac{\sigma_{of} A_f}{2 \sigma_{oc} b} \right)$$

Le (4') (6') coincidono con le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno al baricentro del ferro teso, relative al caso della flessione semplice. Infatti, essendo per $N = O$: $\sigma_{of} A_f = - \sigma_{oc} b d$, sostituendo nella (4') si ha:

$$M'_o = - \sigma_{oc} b d \left(\frac{h}{2} + e - \frac{d}{2} \right) = - \sigma_{oc} b d \left(\frac{h - d}{2} + e \right)$$

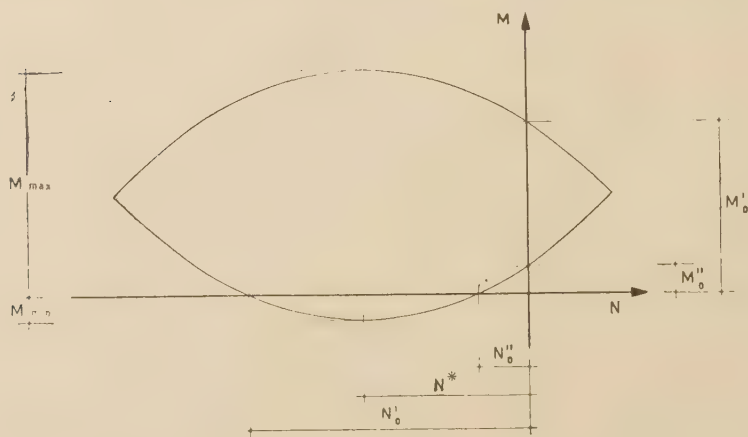



Fig. 5.

Si traggono quindi le seguenti disuguaglianze che esprimono il campo di validità della (4), rispettivamente della (6):

$$N \geqq \sigma_{oc} b \left(\frac{h}{2} + e \right) + \sigma_{of} A_f$$

$$N \geqq \sigma_{oc} b \left(\frac{h}{2} - e \right) + \sigma_{of} A_f$$

Analogamente, dalla (6′):

$$M''_o = \sigma_{oc}\; b\; d\; \left(\frac{h-d}{2} - e\right)$$

Le intersezioni con l' asse N si ottengono dalle stesse (4) e (6) per M = O. Essendo nel caso in esame $e > O$, interessa soltanto l' espressione di M^-, poichè (fig. 5) la curva M^+ incontra l'asse N in punti che non appartengono al dominio. Si ha

$$\frac{h}{2\,N_{oc}}\,(N - \sigma_{of}\;A_f)^2 - \frac{h}{2}\,(N - \sigma_{of}\;A_f) - \sigma_{of}\;A_f\;e = O\;;$$

$$(N - \sigma_{of}\;A_f)^2 - N_{oc}\,(N - \sigma_{of}\;A_f) - 2\,\frac{N_{oc}}{h}\,\sigma_{of}\,A_f\;e = O\;;$$

$$\left.\begin{matrix} N'_o \\ N''_o \end{matrix}\right\} = \sigma_{of}\;A_f + \frac{N_{oc}}{2} \pm \sqrt{\frac{N^2_{oc}}{4} + \frac{2\,N_{oc}}{h}\;{}_{of}\,A_f\;e}\;.$$

L' ascissa cui corrispondono valori stazionari di M si ricava derivando le (4) e (6) rispetto a N; entrambe forniscono

$$N^* = \frac{N_{oc}}{2} + \sigma_{of}\;A_f = \frac{\sigma_{oc}\;b\;h}{2} + \sigma_{of}\;A_f \tag{11}$$

Sostituendo questo valore nelle (4) e (6) si ottiene:

$$\left.\begin{matrix} M_{max.} \\ M_{min.} \end{matrix}\right\} = \mp\,\frac{\sigma_{oc}\;b\;h^2}{8} + \sigma_{of}\;A_f\;e \tag{12}$$

Le (11) e (12) possono ovviamente dedursi dai corrispondenti valori x^* ed y_{max}, y_{min} relativi al dominio di fig. 3, avvalendosi della trasformazione inversa della (7).

3) *Alcuni casi particolari.*

Nel paragrafo precedente si è dimostrato che la precompressione gode della proprietà di non modificare il dominio di snervamento relativo ad una data sezione, e di indurre una semplice traslazione del dominio stesso rispetto agli assi M, N di riferimento. La traslazione di cui si tratta, a parità di tensioni limiti σ_{oc} e σ_{of} è funzione delle due grandezze A_f ed e che potranno definirsi « parametri di precompressione ». E' opportuno esaminare questa dipendenza con riferimento ad alcuni casi particolari.

Si riprenda il diagramma della fig. 3, definito dalle funzioni (8) e (9): esso può interpretarsi come dominio caratteristico delle sezioni reagenti

solo a compressione, e cioè relativo al caso particolare in cui la sezione non è precompressa. In tali condizioni, essendo $A_f = O$, le (10) diventano:

$$x_T = O$$

$$y_T = O$$

cioè gli assi x, y non subiscono alcuna traslazione e coincidono con gli assi M N come si riconosce ponendo $A_f = O$ nelle (7); dalle (4) e (6), con la stessa posizione, si ricava la relazione che lega momento flettente e sforzo normale. Si ha:

$$M^+ = -M^- = \frac{h}{2}\left(\frac{N^2}{N_{oc}} - N\right)$$

che, nel rispetto delle condizioni poste, fornisce momento limite nullo per $N = O$.

Sia ora il dominio riferito alla coppia di assi M, N coincidenti con gli

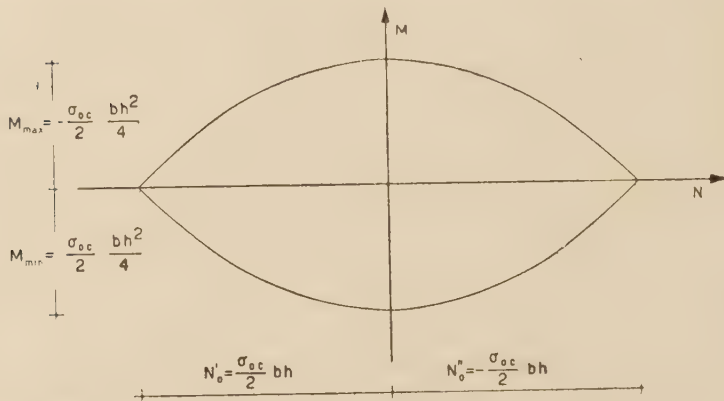



Fig. 6.

assi di simmetria del dominio stesso (fig. 6). Il riferimento attuale può ricavarsi da quello del diagramma di fig. 3 con la traslazione:

$$x_T = -\frac{N_{oc}}{2}$$

$$y_T = O$$

Si è quindi nel caso in cui i parametri di precompressione valgono:

$$A_f = -\frac{N_{oc}}{2\,\sigma_{of}} \qquad (13)$$

$$e = O$$

La relazione tra M ed N si ottiene ancora dalle (4), (6) sostituendovi i precedenti valori dei parametri. Si ha:

$$M^+ = -M^- = -\frac{N_{oc}\, h}{8}\left(1 - 4\frac{N^2}{N^2_{oc}}\right) = -\frac{\sigma_{oc}}{2}\frac{b\, h^2}{4}\left(1 - 4\frac{N^2}{N^2_{oc}}\right)$$

Questa espressione coincide con quella che si ricava dalla nota relazione [10], valida per sezioni omogenee con tensioni limiti a trazione e compressione uguali, $\sigma'_o = -\sigma''_o$

$$M = \pm\, \sigma_o \frac{b\, h^2}{4}\left(1 = \frac{N^2}{N^2_o}\right)$$

ponendo $\sigma_o = -\frac{\sigma_{oc}}{2}$ ed $N_o = \frac{N_{oc}}{2}$.

I valori massimo e minimo di M e l' ascissa corrispondente si ricavano dalle (12) e (11) con le sostituzioni (14). Si ottiene:

$$(14) \qquad N_o = 0 \quad ; \quad M_{max} = -M_{min} = -\frac{\sigma_{oc}}{2}\frac{b\, h^2}{4}$$

Si deduce dalle (14) che una precompressione centrata con armatura di pretensione tale che sia $A_f\, \sigma_{of} = -\frac{N_{oc}}{2}$ equivale a rendere la sezione

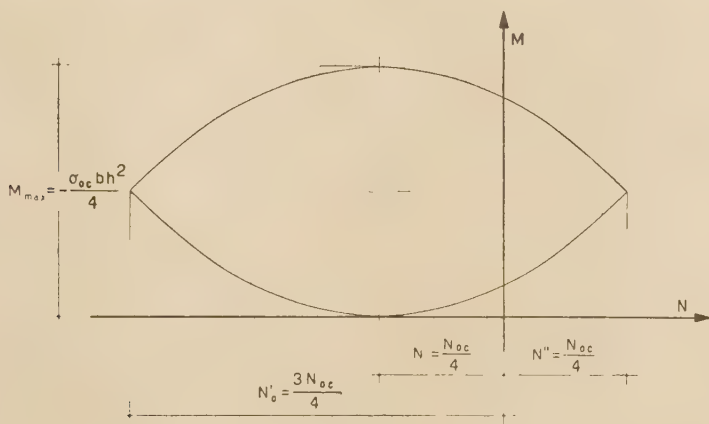



Fig. 7.

omogenea con tensioni limiti, a trazione ed a compressione, ambedue eguali a $\frac{\sigma_{oc}}{2}$. Questo tipo di dominio è quello fondamentale per lo studio in fase di rottura degli archi da ponte precompressi, atteso l' andamento pressochè simmetrico dei momenti massimi e minimi, prodotti dai carichi accidentali, in tali strutture.

Si consideri infine il caso di precompressione caratterizzato dai seguenti parametri:

$$A_f = - \frac{N_{oc}}{4\, \sigma_{of}}$$

$$e = \frac{h}{2}$$

La traslazione, che le precedenti impongono, conduce come è facile verificare al dominio indicato in (fig. 7). I valori massimo e minimo di M si hanno per $N = \frac{N_{oc}}{4}$ e valgono

$$M_{max.} = - \sigma_{oc} \frac{b\, h^2}{4} \quad ; \qquad M_{min.} = 0 \quad ,$$

cioè il momento limite massimo coincide con quello della sezione omogenea con $\sigma'_o = - \sigma''_o = - \sigma_{oc}$.

4) *Il caso della sezione di forma qualsiasi.*

I risultati dei paragrafi precedenti possono facilmente estendersi al

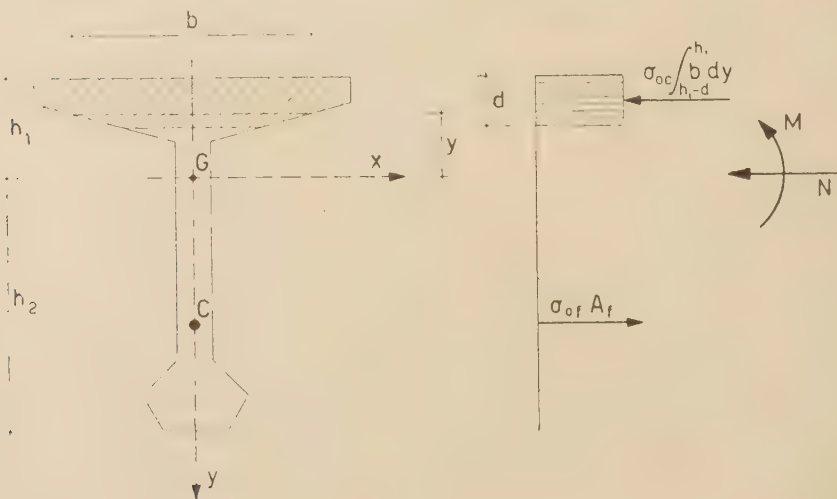



Fig. 8.

caso della sezione di forma qualsiasi, purchè simmetrica rispetto all'asse verticale (fig. 8). Le equazioni (1) e (4), (6) si traducono nella

$$N = \sigma_{oc} \int_{h_1 - d}^{h_1} b\, dy + \sigma_{of}\, A_f$$

e, rispettivamente,

$$\begin{matrix} M^+ \\ M^- \end{matrix} \Big\} = \mp \sigma_{oc} \int_{h_1-d}^{h_1} b\, y\, dy + \sigma_{of}\, A_f\, e$$

Le posizioni (7) diventano

$$x = N - \sigma_{of}\, A_f = \sigma_{oc} \int_{h_1-d}^{h} b\, dy$$

$$y = M - \sigma_{of}\, A_f = \mp \sigma_{oc} \int_{h_1-d}^{h_1} b\, y\, dy$$

Le precedenti assicurano che una traslazione analoga a quella definita dalle (10) consente di passare dal diagramma fondamentale riferito agli assi x, y a quello effettivo collegato ai prescelti parametri di precompressione.

I domini (x, y) la cui ricerca potrà essere perseguita per via grafica od analitica, non sono limitati, nel caso in esame, da curve simmetriche rispetto alla corda comune (asse x), se non esiste simmetria della sezione rispetto alla orizzontale baricentrica.

E' infine importante osservare che permane la convessità del dominio M, N, condizione basilare [9] per la validità del « limit design » nella sua estensione al caso della coesistenza di momento flettente e sforzo assiale.

Napoli, Istituto di Scienza delle Costruzioni, Novembre 1955.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Galli, *Scienza delle Costruzioni*, Pellerano e Del Gaudio, Napoli, 1953.
2. A. Galli, *Il grado di sicurezza nelle strutture*, XLV Convegno Nazionale per il progresso delle Scienze, Rassegna Tecnica dell'A.N.I.A.I., n. 11, Napoli, 1954.
3. Y. Guyon, *Distribution des moments dans les constructions hyperstatiques précontraintes au-delà de la phase élastique*. 2me Congrès de la F.I.P., Amsterdam, 1955.
4. G. F. Janssonius e G. Scherpbier, *Continuous prefabricated prestressed bridge « Klaprozenbrug » in Amsterdam*, Cement, Edition spécial pour le 2me Congrès de la F.I.P. Amsterdam, 1955.
5. C. Van Der Veen, *Measurement of the moment distribution in a prestressed two span beam*, Cement, Edition spécial pour le 2me Congrès de la F.I.P., Amsterdam, 1955.
6. P. B. Morice, *Research in Great Britain on moment redistribution in prestressed concrete continous beams*, Second Congress of the F.I.P., Amsterdam, 1955.
7. A. Galli e V. Franciosi, *Considerations sur la sécurité des arcs raidis avec poutre precontrainte*, 2me Congrès de la F.I.P., Amsterdam, 1955.
8. V. Franciosi, *La verifica a rottura nelle strutture da ponte*, XLV Congresso Nazionale per il progresso delle Scienze, Rassegna Tecnica dell'A.N.I.A.I., n. 11, Napoli, 1954.
9. V. Franciosi, *Sul calcolo a rottura delle strutture in conglomerato armato*, L'Industria Italiana del cemento, Aprile 1954.
10. V. Franciosi, *Premesse all'introduzione del calcolo a rottura nella pratica tecnica*, Rend. Acc. Scienze Fis. e Mat., Serie 4ª, Vol. XXII, Napoli 1955.

Sopra un avanzo fossile di Ippopotamo rinvenuto nella valle di Venosa (Potenza)

Nota del dott. **Giovanni De Biase**, *presentata dal socio* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 4 giugno 1955)

Sunto. — Viene descritta una mandibola fossile di Ippopotamo rinvenuta nel deposito lacustre quaternario di Trentangioli, presso Venosa, che per i suoi caratteri osteologici e per le sue dimensioni corrisponde con gli analoghi resti del Valdarno illustrati dal Leonardi nel 1947 ed è pertanto da attribuirsi alla razza *major* dell' *Hippopotamus amphibius*.

Per consiglio del ch.mo Prof. D' Erasmo, direttore dell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell' Università di Napoli, ho compiuto alcune ricerche di carattere paleontologico nel bacino quaternario lacustre di Venosa (Potenza).

Fra i vari materiali ivi rinvenuti è compresa una mandibola fossile di ippopotamo, che ritengo utile descrivere nella presente nota per le dimensioni e per le caratteristiche osteologiche che offrono un certo interesse.

Essa venne alla luce nello scavo di una delle grotte del Sig. Lagala, che si trovano presso Venosa, in contrada Trentangioli (F.° 187 I, NE), a circa tre Km. dalla città, in direzione nord-nord-est, sulla destra della fiumara, presso a poco alla stessa quota di un' altra stazione, anch' essa sita nel medesimo bacino lacustre, ma molto più nota :“ Terranera ,, , che fu più volte oggetto di indagini da parte di molti autori, fra i quali Nicolucci (15 e 16), De Lorenzo (6 e 7), Rellini (18) e D' Erasmo (5 e 7).

Le grotte Lagala furono scavate in tempi diversi, generalmente per farne ricoveri per il bestiame. In tali scavi vennero alla luce numerosi resti di Mammiferi, ricuperati in parte dal prof. Rocco Briscese, e da lui conservati in un piccolo museo a Venosa.

Il Dottor Domenico Topa in suo lavoro (19) elenca tale materiale e parla anche di alcuni resti da lui riferiti all' *Hippopotamus major*. Nessun avanzo dell' industria umana è stato rinvenuto finora in queste grotte.

La mandibola della quale mi occupo fu trovata nello scavo dell' ultima grotta più a nord, in uno strato argilloso, sovrapposto a strato di argilla calcarifera, biancastra nelle parti più asciutte, gialliccia in quelle più umide. Essa era alla profondità di circa m. 1,50 dalla superficie, che in quel punto è molto inclinata verso il fondo dell' antico lago quaternario.

Dati osteometrici del fossile.

Essendo la parte ossea molto friabile e la roccia avvolgente assai più tenace, ogni tentativo di isolamento provoca facili fratture; sicchè ho dovuto desistere da ulteriori tentativi destinati a mettere in luce la faccia superiore della sinfisi ed alcuni denti.

I principali dati osteometrici che si son potuti determinare sulle parti meglio conservate dell' osso sono indicati nello specchietto che segue, nel quale ho aggiunto, quali termini di confronto, le analoghe misure riportate dal CUVIER e dal NESTI (3) e quelle da me rilevate sopra un esemplare di ippopotamo attuale conservato nel Museo di Zoologia dell' Università di Napoli.

Altre misure:

Altezza della branca orizzontale della mandibola a metà dell' apofisi alveolare dell' M_1: mm 145.

Altezza della branca orizzontale al livello della parte posteriore della sinfisi: mm 174.

Spessore della branca orizzontale della mandibola al livello della metà del primo molare: mm 85.

Spessore della branca orizzontale al livello della parte superiore della sinfisi: mm 110.

Minima distanza tra le due branche mandibolari, al livello del secondo molare: mm 89.

Idem al livello del primo molare: mm 82,5.

Idem al livello della parte posteriore della sinfisi: mm 45.

Non è stato possibile determinare l' angolo mandibolare.

La mandibola, molto robusta, ha una forma complessiva pressocchè quadrata, a branche orizzontali parallele, che, in corrispondenza della sinfisi, si allargano in uno spazio quadratico. Le branche orizzontali sono assai lunghe e verso la parte anteriore si allargano, si ispessiscono e si spostano fortemente in fuori. La sinfisi è diritta nella parte anteriore, molto sviluppata e porta gli incisivi; nella parte posteriore è molto spessa, quasi il doppio di quanto si verifica negli esemplari attuali di *H. amphibius* L.

Descrizione dei denti.

Incisivi. Come in tutte le specie di questo genere, anche nel fossile in esame gli incisivi inferiori sono come coricati rispetto alla sinfisi ed egualmente e completamente diritti, conici, molto protendentisi in avanti all' alveolo. Le loro porzione radicale, rinserrata nell' alveolo alquanto lassamente, è molto sviluppata e si presenta solcata longitudinalmente lungo la superfice esterna. Tali solchi si continuano meno sensibilmente nella

	Secondo CUVIER (es. vivente)	Secondo NESTI			*H. amphibius* (es. vivente) Museo di Zoologia di Napoli	Esemplare in esame
		(es. vivente) Museo di Parigi	(es. vivente) Museo di Firenze	*H. major* (es. fossile)		
Larghezza della mandibola dal bordo alveolare esterno da un canino all' altro	mm 370	mm 320	mm 310	mm 373	mm 340	mm 405
Larghezza dal bordo alveolare degli incisivi al bordo esterno del canino	mm 182	mm 170	mm 160	mm 180	mm 153	mm 160
Lunghezza del bordo alveolare dei molari e premolari	mm 280	mm 290	mm 260	mm 310	mm 295	mm 255 (fino al Pm_3 incl.)

parte extra-alveolare. Essi sono molto sviluppati ma non egualmente; infatti quello inferiore sinistro ha una lunghezza massima di mm 380 e l' inferiore destro una lunghezza massima di mm 410 (si tenga presente che questo ultimo è anche troncato alla punta). Verso la radice non sono cilindrici, ma hanno sezione pronunciatamente ellittica. Infatti hanno ambedue come diametro minimo mm 53 e come diametro massimo mm 70. Ambedue i denti sono coperti da uno strato di smalto che è mediocremente spesso. Nella mandibola manca l' incisivo inferiore secondo sinistro, mentre nulla si può dire del destro, poichè in corrispondenza di esso il fossile è coperto dalla roccia inglobante. L' incisivo secondo sinistro doveva essere anch' esso a sezione ellittica, come si desume dalla forma dell' alveolo. I due primi incisivi si presentano usurati all' estremità distale, ma non in maniera specularmente simmetrica, perchè le superfici usurate sono ambedue dal lato destro, invece che una a sinistra e una a destra, come d' ordinario nell' *H. amphibius* L.

Canini. Dei canini mancano nel fossile in esame le parti extra-alveolari. Una di esse è in possesso del prof. Rocco Briscese, presso il quale ho avuto occasione di osservarla. I canini mostrano una eccezionale robustezza. Sono infatti molto sviluppati e curvi. Nella parte extra-alveolare sono a sezione triangolare, mentre nella parte intra-alveolare sono a sezione fortemente ellittica. Infatti qui presentano come diametro massimo mm 97 e come diametro minimo mm 58. Lo strato di smalto è alquanto più sviluppato che negli incisivi, e segue le ondulazioni longitudinali dell' avorio sottostante. L' avorio ha una caratteristica struttura e mostra, sia negli incisivi, che nei canini, strie estremamente fini e serrate, tutte concentriche intorno all' asse longitudinale del dente.

Premolari. Sono visibili nel fossile solo due premolari: un premolare destro e un premolare sinistro.

Il premolare destro ha la massima altezza al di fuori dell' alveolo di mm 44; e i due diametri alla corona di circa mm 38.

Il dente è a due cuspidi, poste trasversalmente una dopo l' altra; quella anteriore è più piccola, e ambedue presentano la loro superficie triturante molto usurata. Questa nel complesso ha l' aspetto di un grande rettangolo curvilineo, che occupa tutta la corona del dente. Lateralmente al premolare si osserva un rilievo leggero, che è il caratteristico collaretto. Esso si estende, a guisa di festone, tutto intorno alla corona, se si eccettua il lato che guarda verso i molari. Notevole è l' osservare che questo dente si innalza dall' alveolo in maniera sproporzionata alle sue dimensioni, per cui si può pensare che esso sia venuto alquanto fuori durante la fossilizzazione. Le due radici infatti, corrispondenti alle due cuspidi, si continuano a formare la corona dell' unico dente, in maniera da determinare un arco ad angolo acuto, visibile al di sotto del collaretto, limitato lateralmente dalle due radici, affondate negli alveoli.

Quanto alla determinazione di questo premolare, penso che si tratti del premolare terzo inferiore permanente. Infatti esso è in un alveolo alquanto sopraelevato rispetto a quello del dente posteriore, come si verifica nell' *H. amphibius* L.

L' alveolo del Pm_3 della branca sinistra si trova alquanto più innanzi rispetto all' alveolo corrispondente destro, per cui non vi è perfetta simmetria.

Inoltre si deve notare un' altra dissimetria di struttura: in corrispondenza del Pm_3 destro, il ramo mandibolare sinistro presenta sviluppato, al di sotto di uno strato di tessuto osseo compatto di mm 4, subito il tessuto spugnoso, mentre sulla branca sinistra, in corrispondenza dello stesso punto, il tessuto compatto si sviluppa assai di più, e precisamente per mm 24 di spessore.

Il premolare sinistro ha la massima altezza al di fuori dell' alveolo di mm 10, e i due diametri alla corona rispettivamente di mm 37, e di mm 31.

Il dente ha una sola cuspide. La superficie triturante, che si presenta molto usurata, mostra uno strato di smalto alquanto spesso intorno ad una irregolare zona quadratica interna di avorio. Lateralmente anche qui si presenta il collaretto, alquanto pronunziato, ma non sviluppato intorno a tutta la corona del dente. Come si sa, nei molari e premolari inferiori di ippopotamo, al lato esterno l' abrasione è alquanto maggiore, mentre su quello interno le cuspidi sono meno consumate. Tale carattere si può riscontrare in tutti i premolari e molari del fossile, ma particolarmente nel premolare in esame.

Ritengo che il dente descritto sia Pm_4 della dentizione permanente. Infatti il Pm_4 da latte, poichè deve compiere le funzioni trituranti del M_3, che spunta in età adulta, ha la forma complicata, propria dei molari, che manca invece nel Pm_4 permanente, il quale è monocuspidale e semplice, come il dente in esame.

Molari. Sono presenti il M_2 e il M_3.

	M_2	M_3
Massima altezza al di fuori dell' alveolo . .	mm 31	mm 33
Diametro antero-posteriore massimo . . .	mm 60	mm 70
Massimo diametro dall' interno all' esterno . .	mm 28	mm 41

I molari dell' ippopotamo, come è noto, hanno una forma complicata, essendo costituiti da quattro colline coniche, addossate a due a due. Esse sono percorse, lungo le facce esterne, da due profondi solchi longitudinali,

di maniera che la corona del dente, quando comincia ad usurarsi, presenta presso a poco la figura di un trifoglio per ciascun paio di colline. Allorchè l' usura giunge fino all' altezza in cui le colline si uniscono, si forma una figura quadrilobata per ciascun paio di colline. Quando poi l'usura va ancora oltre, le due figure quadrilobate si fondono in una, formando un grande quadrato curvilineo, occupante tutta la corona del dente. Gli ultimi molari poi hanno posteriormente anche una collina semplice, che forma sopra la corona, in seguito all' usura, una caratteristica figura ovale, posta dietro alle due paia di trifogli.

Nel M_2 l' usura ha raggiunto il punto in cui i due trifogli delle colline contigue si sono fusi. Sul lato interno la linea dello smalto, partendo dalla faccia che guarda il M_1, descrive un angolo acuto verso l' esterno, poi si approfonda verso il corpo del dente, ma assai meno di quanto si osserva nel M_2 destro di *H. amphibius* L., raffigurato dal D' ERASMO (7, tav. I, fig. 5), che ha presso a poco lo stesso grado di usura. La linea dello smalto gira intorno alla figura lobata dell' avorio, e, giunta in corrispondenza del punto in cui le colline anteriori sono unite alle posteriori, si approfonda nel corpo del dente, determinando una insenatura, avente all' incirca la forma di una staffa. Poi di nuovo gira intorno all' altro lobo di avorio, e separa, approfondendosi, l'ultima collina impari posteriore, la quale, così com' è usurata, ha una figura losangica. Non si osserva del dente il caratteristico collaretto, così ben delineato nelle figure che riporta il D'ERASMO (7, tav. I, fig. 6).

Il M_3 non è molto usurato. Le due colline anteriori, contrariamente a quelle posteriori, hanno quasi fuse le loro masse trifogliari. Anteriormente al dente, sulla faccia che guarda il M_2, vi è una collina appiattita appena intaccata dall' usura, la cui figura schiacciata è tale che con l' usura darebbe una figura losangica, analoga a quella della collina posteriore del M_2.

Anteriormente le cavità interne, ossia le caratteristiche figure trifogliari di avorio, comunicano appena fra di loro, mentre le figure a trifoglio posteriori sono ancora completamente separate. Più indietro ancora v' è il quinto cono impari, appena leggermente usurato ad angolo obliquo verso l' avanti (in maniera che la figura d' usura sia ovoidale) e ad un livello più alto della faccia triturante del molare. La base della corona non presenta sviluppato il solito cercine, più o meno ingrossato a guisa di collaretto, che nel dente in esame appare sotto forma di debole ispessimento solo sulla faccia esterna dell' ultimo cono impari, la cui presenza è caratteristica del M_3.

In complesso l' usura dei denti sta a denotarci che l' individuo è di età avanzata, sebbene non molto vecchio.

Faccio notare che sulla branca destra manca il Pm_4 e il M_1 al cui posto vi è uno spazio lungo solo mm 64. Riservando per il Pm_4 uno spazio lungo mm 37 (che è la lunghezza del Pm_4, che si trova sulla branca sinistra)

bisognerebbe assegnare al M_1 tutta la lunghezza dello spazio restante, che è appena di mm. 27, mentre nell' esemplare di *H. amphibius* L., del Museo di Zoologia dell' Università di Napoli, che è molto giovane, ho potuto constatare che il M_1 è lungo mm 53. Debbo perciò credere che il M_1 dell'animale in esame o non avesse la forma ordinaria del M_1 di ippopotamo oppure mancasse.

Confronti.

Come ormai è comunemente noto, oggi tutti gli ippopotami fossili e viventi (eccetto alcune forme poco ben conosciute) sono distinti in tre grandi gruppi:

A) *H. (Choeropsis) liberiensis* Morton (12, tav. XXXII e XXXIV, pag. 231-239): ossia l' ippopotamo pigmeo che abita attualmente la Liberia e la Nigeria meridionale e la cui statura è circa la metà dell' *H. amphibius* L. attuale. E' da escludere quindi che l' animale in questione possa riferirsi a tale specie per le sue dimensioni assai maggiori.

B) Ippopotami fossili dell' India: l' *H. sivalensis* Falc. e Cautl., l'*H. dissimilis* Falc. e Cautl., l' *H. anisoperus* Clell., l' *H. megagnatus* Clell., l' *H. platyrhyncus* Clell., l' *H. travaticus* Falc. e Caut., l' *H. namadicus* id., l' *H. palaeindicus* id. ecc., che per la statura, i caratteri craniali, la figura a trifoglio della superficie di abrasione dei molari, si avvicinano all' *H. amphibius* L.; sono specie esaprotodonti, mentre il nostro esemlare è un tetraprotodonte e quindi non ascrivibile ad alcuno di essi. Per gli stessi motivi escludo l'appartenenza del nostro fossile all' *H. hipponensis* Gaudry (2 e 8).

C) *H. amphibius* L., che comprende gli altri ippopotami viventi, le forme di minore statura, che vanno sotto il nome di *H. lemerlei* Grandidier, *H minutus* de Blainville, l' *H. Pentlandi* del Quaternario europeo, e l' *H. melitensis* di Malta e di Creta, e quelle di più cospicue dimensioni, abitualmente conosciute come *H. amphibius major.*

Le dimensioni rilevanti e la grande robustezza della mandibola mi fanno ritenere che il fossile da me esaminato possa attribuirsi all' *H. amphibius major.* Infatti, confrontando la mandibola dell' ippopotamo di Venosa con i resti dell' *H. amphibius major* del Valdarno, conservati nello Istituto geologico di Firenze e descritti dal prof. P. Leonardi (11), si nota che le dimensioni dei due esemplari sono molto vicine tra loro, particolarmente in ciò che riguarda il grande sviluppo in senso trasversale della mandibola e quello in senso antero-posteriore della sinfisi. Ritengo, quindi, che i due esemplari appartengano alla stessa specie ed alla medesima razza.

BIBLIOGRAFIA.

1. ARAMBOURG C. — *Les hippopotames fossiles d' Afrique.* Comptes rendus des séances de l' Acad. des Scien., t. 218. pag. 602-604. Paris, 1944.
2. ARAMBOURG C. — *L' Hippopotamus hipponensis Gaudry.* Bulletin de la Soc. géolog. de France, 5ª s., t. XIV. Paris, 1944.
3. CUVIER G. — *Recherches sur les ossements fossiles.* T. II. Paris, 1834.
4. DE BLAINVILLE H. M. D. — *Ostéographie des mammifères,* t. IV. Paris, 1839-1864.
5. D' ERASMO G. — *La fauna della grotta di Loretello presso Venosa.* Atti R. Acc. Sc. Fis. e mat., s. 2ª, vol. XIX, n. 4. Napoli, 1932.
6. DE LORENZO G. — *Studio geologico del monte Vulture.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. X, n° 1. Napoli, 1900.
7. DE LORENZO G. e D' ERASMO G. — *Avanzi di ippopotamo nell' Italia meridionale.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. XX, n. 15. Napoli, 1935.
8. GAUDRY A. — *Sur un hippopotame fossile découvert à Bône (Algérie).* Bull. Soc. géol. Fr., 3ª s., vol IV. Paris, 1875.
9. GUISCARDI G. — *Comunicazione* (di alcuni nuovi manufatti rinvenuti a Venosa). Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat., vol. XIX, pag. 39 40. Napoli, 1880.
10. HUE E. — *Ostéométrie des Mammifères.* I et II fascicule. Paris, 1907.
11. LEONARDI P. — *L' ippopotamo del Valdarno.* Paleont. Ital., volume XLIII. Pisa, 1947.
12. MORTON S. G. — *Additional observations on new species of Hippotamus.* Journ. Ac. of. Nat. Sc. of Philadelphia, 2ⁿᵈ series, Vol. I. Philadelphia, 1849.
13. NESTI F. — *Descrizione osteologica dell' ippopotamo maggiore fossile.* Mem. Soc. Ital. Sc., vol. XVIII. Modena, 1820.
14. NICOLUCCI G. — *Sugli elefanti fossili della valle del Liri.* Mem. Soc. Ital. delle scienze, detta dei XL, serie III, vol. IV. Napoli, 1882.
15. NICOLUCCI G. — *I primi uomini.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, 1882.
16. NICOLUCCI G. — *Note paleontologiche.* Mem. Soc. It. d. Sc. (detta dei XL), s. IIIª, vol. VI. Napoli, 1883.
17. REYNOLDS H. — *A Monograph of the British Pleistocene mammalia,* vol. III, p. I. *Hippopotamus.* Pal. Soc., vol. LXXIV (1920). London 1922.
18. RELLINI U. — *Sulle stazioni quaternarie del tipo "Chelléen", dell' agro venosino.* Mem. R. Acc. Lincei, Cl. Sc. mor., s. 5, vol. XV, fasc. II. Roma, 1915.
19. TOPA D. — *La collezione paleolitica Briscese e la grotta di Loreto presso Venosa.* Palmi, 1932.
20. VAUFREY R. — *Sur l' Aprotodon Smit-Woodwardi Forster-Cooper et la philogénie de hippopotames.* Bull. Soc. géol. de France, 4ª s., vol. XXVIII. Paris, 1928.
21. ZITTEL K. A. — *Traité de Paléontologie.* Trad. da Charles Barrois. T. 4ª (Mammalia). Paris, 1894.

Fig. 1. — Frammento di mandibola di *Hippopotamus amphibius major*, visto dalla faccia ventrale ($^1/_4$ circa della grand. nat.).

Fig. 2. — Frammento di mandibola di *Hippopotamus amphibius major*, visto dalla faccia triturante ($^1/_3$ circa della grand. nat.).

Studio geologico e petrografico della zona Monte Olibano-Pozzuoli

Nota del dott. **Renato Sinno**, *presentata dal socio* **A. Scherillo**

(Adunanza del dì 4 giugno 1955)

Sunto. — E' stato effettuato uno studio geologico e petrografico della zona compresa tra Bagnoli - La Pietra e Pozzuoli. Nella prima parte del lavoro vengono presi in considerazione i vari affioramenti di tufo giallo della suddetta zona, mentre nella seconda parte vengono trattati i prodotti soprastanti al tufo giallo, con particolare riferimento alla lava trachitica del Monte Olibano.

Tra i prodotti dei vulcani costituenti il terzo periodo flegreo, e precisamente tra quelli che fanno parte del terzo periodo antico, spiccano quelli chiamati del Monte Olibano le cui lave, di natura trachitica, costituiscono le quote più alte (metri 199 e 166) di tutta la zona costiera compresa tra Bagnoli - La Pietra e Pozzuoli.

Essendomi però proposto di condurre su queste lave non solo uno studio analitico petrografico ma anche geologico, ho dovuto necessariamente trattare anche dei prodotti anteriori e posteriori alla esplosione dell' Olibano, per cui il presente lavoro ha inizio con lo studio del tufo giallo che, appartenendo al secondo periodo flegreo, precede cronologicamente la lava trachitica affiorante ai margini della cinta urbana di Pozzuoli.

Nel 1950, in una pubblicazione presentata all' Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, lo Scherillo (1) lamentando la mancanza di un lavoro petrografico d' insieme sui vari tufi che costituiscono la base su cui poggia l' ossatura dei Campi Flegrei, nel dichiararsi un fautore dell'indirizzo chimico della petrografia, iniziava una serie di lavori di tal genere sui tufi flegrei, poggiando le sue prime e fruttifere ricerche sul tipo di tufo più diffuso, più frequente, più noto di tutta la regione : il tufo giallo.

Avendo lo Scherillo rivolto in particolare le sue ricerche sul tufo giallo e grigio della città di Napoli, e precisamente su quelli di S. Stefano al Vomero, di Mergellina, dello scoglio del Lazzaretto tra Nisida e Coroglio e del Monte Gauro, riallacciandomi a tale studio e proponendomi non solo di apportare il mio contributo alla conoscenza chimica e petrografica dei vari tufi flegrei, ma anche di inquadrare i prodotti esaminati nella loro naturale successione cronologica, ho ritenuto opportuno suddividere il presente lavoro in tre parti, e precisamente nella prima parte, riferirò sui risultati delle ricerche che ho condotto su tutti i tufi affioranti nella zona compresa tra Bagnoli e Pozzuoli, nella seconda, tratterò dei vari prodotti soprastanti al tufo giallo, nella terza, mi occuperò dei

prodotti lavici affioranti in località Gerolomini presso Pozzuoli, riferendomi allo studio dei materiali che ho potuto raccogliere in una vecchia cava detta « Cava Regia », della quale da qualche anno si è iniziato di nuovo lo sfruttamento.

Non si può negare che chiunque si accinge ad uno studio dei tufi presenti in questa zona, dopo una prima sommaria osservazione è senz'altro portato ad attribuire ad un unico atto eruttivo tutti i vari spuntoni tufacei affioranti, tanta è la somiglianza dei caratteri fondamentali.

A questa prima impressione non sono sfuggito neanche io, ma devo confessare che solo il ritorno continuo sui luoghi, l'entusiasmo di penetrare nei punti più inaccessibili, la conoscenza profonda di alcune zone ove non è molto facile penetrare, hanno agevolato di molto il mio lavoro sul terreno, permettendomi non solo di prelevare tutti quei campioni occorrenti per uno studio minuzioso, i cui frutti vedono la luce dopo due anni di ricerche di laboratorio, ma anche di raccogliere quella somma di prove necessarie per convalidare la prima impressione ricevuta.

PARTE PRIMA

Ricerche sui tufi presenti nella zona compresa tra Bagnoli e Pozzuoli.

a) *Descrizione stratigrafica.*

Quando si percorre la fascia costiera che unisce Bagnoli con Pozzuoli, le prime formazioni di tufo giallo si possono incontrare in località La Pietra, all'altezza della Villa Nettuno, ove il secondo periodo flegreo è rappresentato da una parete di tufo giallo che, ergendosi dalle acque del mare, costituisce la solida piattaforma su cui poggia la strada litoranea. Per tutto il tratto che va da Villa Nettuno fino all'altezza della Chiesetta consacrata alla Madonna di Pompei, il tufo giallo, che si mantiene a contatto costante con il mare, conserva sempre inalterato il suo colore, la sua compattezza, la discreta ricchezza degli inclusi, ma lì dove è costruita la prima casa facente parte dell'abitato della città di Pozzuoli (Proprietà D'Alicandro) esso passa ad un tufo di color grigio verde, con una ricchezza di inclusi che ricorda perfettamente il tufo giallo. Tale passaggio di colore è ancora osservabile all'altezza del secondo tunnel della Ferrovia Cumana, partendo da La Pietra per dirigersi verso la stazione dei Gerolomini, dove una grande parete di tufo giallo (nella quale è scavata la galleria citata) di circa 30 metri di altezza, sembra quasi solcata da chiazze di color verdolino, che diventa ancor più evidente nelle ore in cui il sole vi batte direttamente.

Doppiata la curva di La Pietra, proseguendo verso Gerolomini, il tufo

giallo continua ad apparire in tutta la sua potenza lungo tutta la parete che guarda il mare fino a quando, al limite iniziale della Cava Musa, cede il posto ad un tufo arrossato, ricco di scorie dello stesso colore, allorquando su di esso cominciano ad incombere i materiali lavici della trachite del Monte Olibano. Questo tufo arrossato costituisce quindi la zona di contatto tra il tufo giallo ed i prodotti lavici dell' Olibano. Infatti la lava trachitica, a causa della sua temperatura, appoggiandosi e scorrendo poi sulla superficie del tufo sottostante, già evidentemente erosa, ne riempì gli avvallamenti provocando quindi l' arrossamento dei materiali preesistenti con la conseguente disidratazione dei prodotti ferrici del tufo stesso.

Dopo la scomparsa del tufo giallo sotto i prodotti del Monte Olibano, occorre spingersi per un buon tratto lungo il litorale, lasciando indietro Gerolomini e Cappuccini. Superato, per via mare, il convento dei Padri Cappuccini, attualmente invaso dalle acque fino all' altezza quasi del primo piano, il tufo giallo fa la sua comparsa al di sotto della Chiesa di S. Vincenzo sita in Via Napoli, poco distante dalla Porta Napoli, antico ingresso alla città di Pozzuoli, ma si manifesta in tutta la sua potenza (metri 50 circa, misurati dal livello del mare), poco prima di giungere al molo della città. Alla base di questa enorme parete vi sono tre cavità di diverse dimensioni: procedendo dal molo sia la prima che la terza sono tipiche grotte di escavazione marina, dovute all' infrangersi delle onde sulla parete tufacea. Dalla volta della prima grotta, molto ampia, ho raccolto delle incrostazioni biancastre che ho ritenuto interessanti per il completamento dello studio analitico dei tufi, anche perchè uno studio sistematico sulle varie incrostazioni della zona flegrea non è stato ancora effettuato. Sul risultato dell' analisi quali-quantitativa riferisco nella nota [1]).

---

[1]) **Analisi della incrostazione raccolta sulla volta della prima grotta di escavazione marina della parete tufacea del molo di Pozzuoli, parete sottostante alla località "Terra". (Analista SINNO).**

L' incrostazione si presenta di un color bianco latte, farinosa e di nessun sapore.

Resid. insol.	0,30	Cl	0,88
SiO_2	0,21	CO_2	0,84
Fe_2O_3	0,32	SO_3	46,30
Al_2O_3	ass.	H_2O	19,02
MgO	0,36		———————
CaO	30,94		100,47
Na_2O	1,10	O=Cl	0,22
K_2O	0,20		———————
			100,25

Da questi dati considerando CO_2 legata a CaO sotto forma di $CaCO_3$. SO_3 ed H_2O

La seconda galleria, sita al centro delle due citate, presenta un aspetto del tutto diverso: essa è scavata dalla mano dell' uomo e ciò lo si può dedurre dalla forma dell' ingresso. La base di questa galleria manufatta, una volta certamente al disopra del livello del mare, è oggi invasa dalle acque a causa del bradisismo che investe tutta la zona puteolana. Penetrando con una barca ad un certo punto il piano della galleria si rialza; l' uscita è sistemata al centro della città di Pozzuoli e precisamente alle spalle della piazza principale, accanto ad una galleria, adibita fino al 1946 al passaggio di una linea tramviaria, attualmente ostruita Se al livello dell' acqua del mare il tufo giallo presenta queste gallerie, naturali o manufatte che siano, la sommità è servita agli abitanti come solida piattaforma edilizia: infatti su questa collina tufacea poggiano le fondamenta del quartiere più antico e più popolato della città di Pozzuoli, soprannominato « Terra », al centro del quale sorge il Duomo.

Doppiato il molo e penetrando nella darsena, annessa al porto il tufo giallo ricompare in misura molto ridotta sulla parete sita di fronte alla Chiesa Madonna dell' Assunta, rappresentando quest'ultimo il lembo estremo della fascia costiera Bagnoli — La Pietra — Pozzuoli.

Questo è il limite del presente lavoro. proponendomi di trattare nel prossimo tutta la fascia costiera compresa tra Pozzuoli e Lucrino.

Ma per completare tutti gli affioramenti di tufo giallo compresi nella zona costiera, devo includere nella presente descrizione statigrafica quegli spuntoni tufacei che costituiscono lo scoglio di La Pietra e quello di fronte alla Chiesetta consacrata alla Madonna di Pompei.

Lo scoglio di La Pietra è costituito di tufo giallo ma differenziato in due tipi e precisamente quello sottostante è nettamente stratificato, quello soprastante, in discordanza col primo, è costituito di tufo giallo caotico, analogo a quello che costituisce il limite superiore della parete affiorante al gomito di La Pietra. Qui la stratificazione del tufo giallo sottostante al caotico è tanto più evidente, quanto più si procede verso est. Nella massa gialla appare però di tanto in tanto qualche strato di tufo verde intercalato. Tale osservazione è nettissima, oltre che evidente, nella serie di scogli affioranti di fronte alla Chiesetta « Madonna di Pompei », ove il tufo giallo, stratificato anche qui, si alterna con strati di color verde chiaro, ricco di inclusi, sopratutto di pomici di varia grandezza. Dalla posizione degli strati, dal confronto e dalla analogia con i materiali circo-

---

legate a CaO sotto forma di $CaSO_4 \cdot 2H_2O$, Cl legato a Na_2O sotto forma di NaCl e SO_3 residua legata a K_2O, a Na_2O ed a MgO rispettivamente sotto forma di K_2SO_4, Na_2SO_4 e $MgSO_4 \cdot 7H_2O$, si ricavano le seguenti percentuali in peso:

$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	92,38	Na_2SO_4	0,85	$2Fe_2O_3 \cdot 3H_2O$	0,81
$CaCO_3$	1,80	NaCl	0,69	Resid. Ins.	0,30
$MgSO_4 \cdot 7H_2O$	2,32	K_2SO_4	0,36	SiO_2	0,21

stanti, si può concludere che questi due tufi, diversi tra loro, appartengono però alla stessa bocca eruttiva.

Avendo messo in evidenza i vari affioramenti di tufo giallo lungo la fascia costiera e nel relativo tratto di mare compreso tra La Pietra e Pozzuoli, ho rivolto in seguito la mia ricerca verso gli affioramenti dell' entroterra.

A tale scopo ho iniziato a percorrere la strada carrozzabile che congiunge Agnano con Pozzuoli alto (Pozzuoli-S. Gennaro), addentrandomi nelle campagne site a destra ed a sinistra della strada medesima. In vallone Piscicelli precisamente nella zona compresa tra Monte Ruspino ed il Preventorio «Umberto di Savoia», seguendo il percorso di una funicolare impiantata per il trasporto del materiale di risulta di una galleria per l' Acquedotto Campano, in proprietà Giustino, ho avuto modo di poter constatare la presenza del tufo giallo, mai riscontrato in questa zona.

La parete tufacea ha uno sviluppo in lunghezza di circa una cinquantina di metri mentre il suo spessore raggiunge una potenza di metri sei o sette circa. Tale valore va considerato tenendo conto soltanto della superficie dello strato affiorante, ma la potenza della parete tufacea è di gran lunga superiore se si tiene conto che al disotto del piano di strada ad un dislivello di circa quindici metri, una galleria per l' Acquedotto Campano è stata scavata nel tufo giallo.

Anche in questo punto il tufo giallo si presenta sottoposto nel suo tratto finale (versante che guarda La Pietra - Vallone « La Bolla ») ad un altro tufo di color azzurro verdolino, poco compatto e su di esso discordante.

In tutta la restante parte che conduce a Pozzuoli il tufo giallo non affiora più; l' ultimo lembo compare all' ingresso della galleria della Ferrovia Cumana nel tratto che unisce Cappuccini con Pozzuoli. L'intera galleria che ha una lunghezza intorno ai cento metri è scavata nel tufo giallo, il quale però nella parte superiore e nella porzione che dà nella Proprietà Provenzano (Villa Renda) si risolve in un tufo bigio, anch' esso compatto, che ne rappresenta una modificazione locale, in quanto fa sempre parte dello stesso apparato craterico.

Nel recinto urbano di Pozzuoli, la totalità delle fondazioni edilizie poggia sul tufo giallo. Ne sono prova gli ultimi scavi effettuati nel luglio 1955 per la costruzione del nuovo Rione Cappuccini, ove a pochi metri dal livello di superficie è affiorato il tufo.

Sempre nella cinta urbana di Pozzuoli, ma a livello stradale, è possibile osservare una fascia tufacea gialla sulla strada che conduce all' autostrada Pozzuoli-Lucrino, all' altezza del quadrivio Annunziata - Via S. Pasquale - Via Pergolesi - Via Serapide, alle spalle del Tempio di Serapide.

In tutta la restante parte della zona interessata a questa studio, il tufo

del secondo periodo flegreo è dovunque sostituito dai prodotti dei vulcani cronologicamente posteriori.

Prima di procedere alla descrizione stratigrafica di tali prodotti posteriori che tratterò nella seconda parte, ritengo opportuno riferire sulle ricerche analitiche e petrografiche effettuate sul tufo giallo.

b) *Ricerche petrografiche.*

I campioni che sono oggetto del presente studio sono stati raccolti nelle località seguenti, e precisamente a:

La Pietra: Scoglio di fronte alla Chiesetta consacrata alla Madonna di Pompei. (Analisi N° 1 — Analista SINNO);

La Pietra: Parete tufacea nella quale è scavata la galleria della Ferrovia Cumana, esattamente la seconda partendo dalla stazione di La Pietra. (Analisi N° 2 — Analista SINNO);

Pozzuoli: Molo. Parete tufacea a contatto col mare, sottostante al Rione " Terra ". (Analisi N° 3 — Analista SINNO);

Pozzuoli: S. Gennaro — Proprietà Giustino — Parete tra Villa Arabia ed il vallone Piscicelli. (Analisi N.° 4 — Analista SINNO);

La Pietra: Scoglio di fronte alla Chiesetta consacrata alla Madonna di Pompei. Tufo di color verdolino a cui fa passaggio il tufo giallo. (Analisi N° 5 — Analista SINNO).

Ad un primo esame macroscopico i tufi raccolti nelle varie località indicate sono quasi perfettamente identici: si presentano compatti e resistenti ai colpi del martello, hanno la medesima colorazione, sono ricchi di inclusi per la maggior parte pomici colorate di un giallo intenso, ma variabili per dimensione e per la relativa distribuzione. In altri termini mentre i tufi di La Pietra risultano a grana fine, costituiti essenzialmente da ceneri estremamente suddivise, quelli di Pozzuoli sono caratterizzati dalla grossezza della grana e dalla grandezza degli inclusi, caoticamente distribuiti nella massa cinerea.

Tutto ciò fa quindi pensare ad una classifica degli elementi dovuta non solo ad una distribuzione gravitativa, ma anche alle condizioni dei venti e sopratutto alla vicinanza o meno della bocca eruttiva più prossima a Pozzuoli che a La Pietra.

Lo studio delle sezioni sottili, mentre ha confermato per i tufi gialli i caratteri innanzi esposti, ha permesso tra l' altro di mettere in evidenza la composizione mineralogica che risulta caratterizzata dall' associazione di minuti frammenti di ortoclasio e plagioclasio basico con pirosseno.

In talune cavità delle pomici del tufo del molo di Pozzuoli ho potuto

osservare la presenza di un minerale zeolitico, costituito dalla riunione di più individui cristallini lamellari. La presenza di tale minerale fa quindi pensare ad una successiva azione idrotermale.

Per quanto riguarda il tufo verde di La Pietra e precisamente dello scoglio di fronte alla Chiesetta della Madonna di Pompei, in sezione sottile si presenta costituito da una grana finissima. Nella massa cinerea si riescono ad osservare piccolissimi frammenti cristallini costituiti da sanidino, qualche raro granello plagioclasico e, riconoscibili per il loro pleocroismo, frammenti di pirosseno. I frammenti di pomici, di dimensioni più ragguardevoli, si presentano ricchissimi di cavità: in alcune di esse si osserva la deposizione di minuti ma perfetti cristalli di calcite (ciò spiega la presenza di CO_2), in altre è andato a deporsi un minerale di color verde chiaro, disposto a forme di piccolissimi filamenti negli interstizi. Tale minerale, che si presenta debolmente birifrangente, rappresenta un prodotto di alterazione originatosi per azione idrotermale o marina sul tufo.

Per l' insieme dei caratteri il minerale è da assegnarsi al gruppo della glauconite, la cui presenza oltre a spiegare l' azione marina od idrotermale che sia, dà ragione della colorazione verdolina che questo tufo ha assunto.

Le proprietà comuni messe in evidenza per i saggi prelevati in luoghi diversi per essere ritenute perfettamente valide avevano bisogno di una riconferma che non ammettesse più alcun dubbio, riconferma che solo la analisi quantitativa poteva dare, come in realtà ha dato, permettendomi di attribuire alla stessa bocca eruttiva i tufi di La Pietra, di Gerolomini, di Pozzuoli, sia di quello affiorante al molo, sia di quello da me messo in evidenza in Proprietà Giustino (Pozzuoli-S. Gennaro).

Nella tabella seguente riporto tutti i dati analitici dei campioni studiati e descritti.

	1	2	3	4	5
SiO_2	44.96	45.14	44.96	45.44	44.24
TiO_2	0.20	0.20	0.19	0.20	0.18
ZrO_2	0.10	0.09	0.10	0.10	0.08
Al_2O_3	17.90	17.56	17.20	18.60	15.51
Fe_2O_3	5.04	5.35	5.41	5.11	0.40
FeO	0.04	0.10	0.08	0.12	0.04
MnO	0.14	0.14	0.14	0.14	0.14
MgO	3.34	2.54	2.70	3.18	1.82
CaO	4.24	3.80	4.09	4.04	5.56
BaO	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
K_2O	4.74	4.80	5.30	4.72	4.74
Na_2O	3.48	4.58	4.44	4.05	5.47
P_2O_5	0.53	0.30	0.50	0.28	0.26
SO_3	0.08	0.08	0.08	0.09	0.06
Cl	2.20	0.60	2.10	0.29	1.90
CO_2	1.70	2.02	1.90	1.78	1.72
H_2O^-	7.52	8.06	7.56	6.94	9.06
H_2O^+	3.70	4.30	3.46	4.86	4.96
	99.97	100.02	100.27	100.00	100.20
O = Cl	0.55	0.15	0.52	0.07	0.47
	99.42	99.87	99.75	99.93	99.73

Dai risultati delle analisi, dedotta da ciascuna la quantità di $CaCO_3$ corrispondente a CO_2, quella di NaCl corrispondente a Cl ed infine la quantità di $Ca_3(PO_4)_2$ corrispondente a P_2O_5, si possono calcolare i seguenti valori di NIGGLI:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si°
1	166	39	32	6	23	0.49	0.56	1.34	0,86
2	168	39	29	4	28	0.40	0.49	1.21	0.75
3	157	38	30	5	27	0.44	0.50	1.18	0.75
4	161	39	30	5	26	0.42	0.55	1.25	0.71
5	166	34	23	12	31	0.36	0.44	1.03	0.74

Allo scopo di stabilire un confronto tra il tufo giallo di Bagnoli-La Pietra e Pozzuoli e quello del medesimo periodo ma di località diverse dei Campi Flegrei, come ad esempio quelli di Coroglio, Nisida, Vomero, Monte Gauro, riporto nella tabella alla pagina seguente alcune analisi (con i relativi valori di NIGGLI) effettuate dallo SCHERILLO (2) su campioni di tufo giallo raccolti nelle seguenti località:

A) Tufo giallo di S. Stefano al Vomero. (Analista SCHERILLO).

B) Tufo giallo di Via S. Felice al Vomero. (Analista SCHERILLO).

C) Tufo giallo di Villa Lia in Via Orazio. (Analista SCHERILLO).

D) Tufo giallo del Monte Gauro. (Analista SCHERILLO)

E) Tufo giallo dello scoglio del Lazzaretto tra Nisida e Coroglio. (Analista SCHERILLO).

Confrontando ora i valori ottenuti, si possono trarre le seguenti conclusioni:

1) I vari tufi gialli di La Pietra, del molo di Pozzuoli e di Pozzuoli S. Gennaro devono necessariamente appartenere allo stesso centro erut-

	A	B	C	D	E
SiO_2	50.23	49.53	49.69	52.07	54.46
TiO_2	0.23	0.25	0.23	0.25	0.25
ZrO_2	0.05	0.03	0.04	0.06	0.06
Al_2O_3	16.38	16.41	16.27	16.36	16.56
Fe_2O_3	4.76	4.27	5.19	3.95	3.95
FeO	0.58	0.45	0.29	0.31	0.31
MnO	0.10	0.11	0.10	0.10	0.10
MgO	1.42	1.29	1.39	1.10	0.82
CaO	3.88	3.11	3.84	2.36	2.35
BaO	0.07	0.16	0.13	0.04	0.04
K_2O	6.10	7.37	5.66	6.01	6.14
Na_2O	3.55	2.71	3.03	3.42	5.18
P_2O_5	0.16	0.18	0.21	0.06	0.08
SO_3	0.11	0.08	0.07	0.10	0.12
Cl	0.07	0.09	0.04	0.03	0.88
CO_2	0.88	0.66	0.84	0.13	0.88
H_2O^-	3.64	5.02	3.64	5.26	3.24
H_2O^+	7.75	8.11	9.67	8.99	4.48
	99.96	99.83	100.33	100.60	99.90

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si°
A)	192	37	23 ½	11 ½	28	0.53	0.34	0.94	0.91
B)	198	39	22	9 ½	29 ½	0.64	0.34	1	0.91
C)	195	38	24	12	26	0.55	0.33	1	0.96
D)	217	40	20	10	30	0.54	0.33	1	0.98
E)	228	41	19	5 ½	34 ½	0.47	0.28	1.02	0.96

tivo. I risultati delle varie analisi sono così vicini che non prestano il fianco ad alcun dubbio. D' altra parte se qualche valore a prima vista sembra contrastante (come ad esempio il valore del cloro che va da un valore minimo del 0.29 °/₀ ad un valore massimo del 2.20 °/₀), ciò è dovuto ad una ragione quanto mai semplice, dipendente dal luogo dove il campione è stato prelevato. Infatti la percentuale di cloro presente risulta maggiore nelle analisi N° 1 e 3, vale a dire per quei campioni di tufo giallo che ho raccolto al molo di Pozzuoli ed allo scoglio di La Pietra ove vi è il continuo contatto con le acque del mare, che battendo sulle pareti tufacee, le impregnano depositando il cloruro di sodio con la successiva evaporazione. Ciò spiega anche la maggiore percentuale di protossido di sodio presente, dalla quale ho sottratto, in tema di ricerca dei valori del Niggli, quella parte eccedente spettante al cloro per considerarlo sotto forma di cloruro di sodio.

2) Se si confrontano i valori di Niggli per la silice dei tufi di La Pietra e Pozzuoli con quelli del Gauro, del Lazzaretto e di S. Stefano, si osserva una netta discordanza. Infatti su un valore di *si* che per i primi si deduce compreso tra 190 e 220, per i secondi tale valore è compreso tra 157 e 168, cosa che mi permette di affermare che i tufi dei quali vado occupandomi certamente appartengono ad un tipo magmatico meno acido, senza poter precisare di più a causa delle alterazioni che il tufo ha subito.

3 Considerando l' analisi N° 5 (tufo verde dello scoglio di La Pietra di fronte alla Chiesetta dedicata alla Madonna di Pompei) si osserva che la sua composizione, certamente vicina a quella del tufo giallo flegreo tipico, si discosta alquanto da quella del tufo giallo costituente il centro eruttivo di La Pietra-Pozzuoli. Qualunque fattore si voglia tener presente, come ad esempio un particolare stadio di alterazione o una maggiore o minore concentrazione di taluni dei componenti mineralogici, resta comunque sempre da spiegare il motivo di questa colorazione verde.

Infatti confrontando i valori analitici di un tufo giallo di qualsiasi località compreso nel tratto La Pietra - Pozzuoli e del tufo verde, la differenza di composizione chimica si verifica per tutti i componenti escluso per quello che dovrebbe essere direttamente interessato per la spiegazione del passaggio del colore dal giallo al verde. (Mi riferisco alla ricerca dell' ossido ferroso, che, più volte controllato, ha dato sempre la stessa percentuale).

Questa doppia colorazione, infatti, del tufo giallo-verde, frequente nei tufi flegrei, è stata spiegata dai vari Autori che se ne sono occupati in due modi diversi, prendendo sempre come base di queste ipotesi i componenti FeO ed Fe_2O_3. Precisamente se si considera il tufo giallo derivato dal verde bisogna ammettere che tale variazione di colore sia dovuta all' ossidazione dell' ione ferroso a ferrico; viceversa se si considera il tufo

verde derivato dal giallo (ipotesi questa ammessa dal SALVATORE (3)) bisogna interpretare tale passaggio giallo-verde come dovuto ad una riduzione dell'ione ferrico a ferroso. Le due spiegazioni, entrambe possibili e giustificate dal punto di vista chimico, nel caso dei tufi dei quali mi occupo non sono applicabili: infatti osservando le percentuali di FeO rinvenute per il tufo giallo, si può notare che esse oscillano tra un minimo del 0, 4 °/₀ ad un massimo del 0,12 °/₀, mentre per il tufo verde il valore dello FeO è del 0,04 °/₀. Tali variazioni, rientrando nell' ordine di percentuali al disotto dell' uno, non possono assolutamente giustificare una variazione di colore così sensibile, là dove soli forti percentuali di FeO e di Fe_2O_3 potrebbero dar ragione di questo interessante fenomeno, che, oltre allo scoglio innanzi citato, si presenta, anche se limitato a piccole chiazze, sulla parete tufacea prospiciente a tale scoglio.

Devo quindi concludere che l' unica spiegazione del fenomeno è da ricercarsi nella presenza del minerale glauconitico depostosi nelle cavità delle pomici del tufo in seguito ad una alterazione dovuta ad un' azione marina od idrotermale. A tale conclusione erano del resto giunti anche RITMANN e SALVATORE (4) a proposito del tufo verde di Ischia che è cronologicamente precedente al tufo giallo. Il D' ERASMO (5), riallacciandosi all' idea del DAINELLI (6) considera il tufo verde, originatosi al disotto del livello delle acque del mare, come costituente una fase sottomarina, distinta dal tufo giallo che, al contrario, costituisce una fase subaerea. Entrambi i tufi appartengono però al secondo periodo flegreo.

Del tufo verde si è occupato successivamente l' IPPOLITO (7, 8) che ne mise in evidenza il suo rinvenimento in un pozzo profondo perforato al Rione delle Mofete sul versante verso il Fusaro, e, recentemente anche lo scrivente ne ha segnalato la presenza alla base del Monte Barbaro, sul versante Ovest (9).

4) Spiegata nel tufo verde tale colorazione con la presenza del minerale glauconitico formatosi quale prodotto di alterazione, rimane sempre da chiarire la sua presenza nel tufo giallo ed i suoi rapporti con questo ultimo. L' unica osservazione che si possa fare, tenendo conto dei risultati analitici che differenziano questi due tufi l'uno dall'altro così nettamente, è quella di considerare il tufo verde come un' intercalazione del tufo giallo, pur appartenendo entrambi alla stessa bocca eruttiva.

PARTE SECONDA

Ricerche sui prodotti sovrastanti al tufo giallo.

a) *Descrizione stratigrafica.*

Se la via costiera che congiunge Bagnoli con Pozzuoli è interamente tagliata nel tufo giallo, la strada che passa per Agnano-S. Gennaro-Solfatara (Via Domiziana) è tagliata nei prodotti soprastanti, dimodochè i limiti dei prodotti costituenti le serie affioranti risultano compresi in questi due tratti di strada. Partendo quindi dalla Via Domiziana e percorrendo le valli che scendono al mare è stato possibile non solo lo studio dei materiali di copertura del tufo giallo, ma anche la costruzione degli eventi che precedettero l' inizio del terzo periodo dell' attività flegrea.

Il tufo giallo che affiora nel tratto compreso tra Bagnoli-La Pietra e Pozzuoli presenta due caratteristiche che colpiscono immediatamente l'osservatore: si presenta fortemente fessurato e, nella parte superiore, risulta delimitato da una superficie quanto mai irregolare.

Le fratture seguono una direzione Nord-Sud e sono evidenti sulle pareti tufacee di La Pietra e di Pozzuoli S. Gennaro; esse aumentano di intensità procedendo da Est verso Ovest, raggiungendo il massimo sviluppo nel tufo presente al molo di Pozzuoli.

La irregolarità del limite superiore, che varia fortemente da punto a punto, fa presupporre che l' arco La Pietra - Pozzuoli fu interessato sia da intensi fenomeni di assestamento (come è dimostrato anche tanto chiaramente dai numerosi spostamenti stratigrafici anche se di entità non molto rilevante) che da una profonda azione erosiva, la quale in base alla esposizione ed alla pendenza della zona investita, ove con maggiore, ove con minore intensità, fece risentire le sue conseguenze prima disgregando la superficie del tufo giallo e poi asportando il materiale disgregato, incidendo delle valli, nel cui fondo andarono ad adagiarsi i prodotti dei vulcani posteriori.

Partendo dalla stazione di Bagnoli della Ferrovia Cumana e, proseguendo verso Ovest i prodotti che affiorano lungo la strada ferrata, quando si oltrepassa il passaggio a livello di Via Miseno, appartengono al cratere di Astroni. Gli strati che assumono la massima potenza al disotto del tracciato della nuova Via Eurialo che conduce ai fabbricati dell' INA casa, sono costituiti da pozzolane molto chiare di color bianco latte, alternantesi con strati di pomici chiare. All' altezza delle Terme Pepere i prodotti chiari di Astroni cominciano ad essere sostituiti da quelli di colore avana rossastro appartenenti al cratere di Agnano, che si manifestano in tutta la loro potenza in una sezione alle spalle della Villa Net-

tuno, poco prima della Stazione della Ferrovia Cumana a La Pietra, in proprietà « Acava ».

La sostituzione dei prodotti di Agnano a quelli di Astroni appare in maniera netta all' occhio di chi è abituato allo studio dei prodotti flegrei, malgrado il forte rimaneggiamento dei materiali: infatti lo stesso terreno vegetale che è bianco latte nelle campagne site alla periferia di Bagnoli si trasforma gradatamente, nelle campagne di La Pietra, in un colore avana rossastro, che è la tinta predominante delle pozzolane e delle pomici eruttate dalla bocca di Agnano. Prima dell' imbocco della galleria subito dopo La Pietra, i prodotti di Agnano sono sovraimposti ad una serie di numerosi strati di una pozzolana sabbiosa giallina, alternantesi con una pozzolana di un caratteristico colore azzurrino, ove si osserva anche qualche spostamento stratigrafico (fig. 1).

Fig. I — La Pietra - Serie delle pozzolane giallo-azzurrine con piccoli spostamenti stratigrafici.

Di tanto in tanto fra questi strati compare qualche lente di sabbia mescolata alle pozzolane, cosa che permette di affermare che questi materiali, che sono per posizione superiori al tufo giallo ma inferiori ad Agnano, sono rimaneggiati. Essi, trasportati dalle acque, colmarono il fondo di questa valle chè è una delle tante scavate dall' erosione nel tufo giallo.

Nel versante Ovest della galleria, al di sopra delle pozzolane giallo-azzurrine, ricompaiono i prodotti di Agnano in una sezione di 70-80 metri di altezza, messa ancor più in evidenza da alcuni lavori di demolizione effettuati, nell' ottobre 1954, per alleggerire la portata del materiale convogliato dalle acque, nelle stagioni di pioggia, sui binari della strada ferrata Cumana, che in questo punto attraversa una trincea scavata nel tufo giallo.

Accedendo dalla Via Domiziana al Vallone di Torre Piscicelli, al disopra dei prodotti di Agnano, che sono ancora rappresentati da strati di una certa potenza (metri 15-20), compaiono quelli della Solfatara, costituiti in prevalenza da pozzolane di colore grigio marrone, alternate con pomici. Ad Ovest del Vallone Piscicelli la serie di Agnano è ancora più ridotta ed alla grande parete tufacea di La Pietra essa poggia su di uno strato di tufo giallo caotico, i cui blocchi sono di notevoli dimensioni. Superiormente i prodotti della Solfatara sono poco rilevabili dato il forte rimaneggiamento dei materiali e la mescolanza col terreno vegetale.

Nel Vallone « La Bolla », il cui accesso è dalla ex-Villa Arabia (attuale proprietà Giustino sulla Via Domiziana), al disopra della parete tufacea gialla da me messa in evidenza, ricompaiono le pozzolane gialline ed azzurrine, anzi in questo punto le pozzolane azzurrine predominano su quelle gialle ed occupano tutto il fondo del vallone. Tutto il tratto della Via Domiziana, compreso tra il bivio dell' Ippodromo e Casa Avallone, attraversa i prodotti della Solfatara, mentre nel tratto compreso tra il bivio di Agnano-Solfatara ed il Preventorio « Umberto di Savoia » (collina San Gennaro-Pozzuoli) la strada taglia esclusivamente i prodotti di Agnano, ma a circa cento metri dall' ingresso del Preventorio, sulla parete che guarda il mare, si nota chiaramente la zona di contatto Agnano-Solfatara, i cui prodotti poggiano in discordanza. In tutto il restante tratto che conduce a Pozzuoli la Domiziana taglia i prodotti della Solfatara caratterizzati dalle pozzolane grigio marrone, ricchissime di inclusi costituiti in prevalenza da blocchi trachitici di dimensioni ragguardevoli, sopratutto nella zona circostante al cratere.

Percorrendo ora in corrispondenza il medesimo tratto per la strada costiera, in direzione dei Gerolomini, a mezza strada tra il Vallone « La Bolla » e la Cava Musa, i prodotti di Agnano subiscono una brusca interruzione nel senso che essi si trovano quasi in contatto verticale con un tufo di color verde scuro, soprastante al tufo giallo, ma compreso tra due letti di scorie, di cui il superiore è di gran lunga più ricco di quello inferiore. Questo tufo, malgrado l' uguaglianza del colore, sia per posizione che per origine, non ha nulla a che vedere con quello verde, intercalato col tufo giallo stratificato, presente a La Pietra ed allo scoglio difronte alla Chiesetta « Madonna di Pompei ». Tale tufo verde scuro, compreso tra i due letti di scorie, è cronologicamente compreso tra la fine dell' esplosione

del cratere di tufo giallo, che costituisce l' arco Pozzuoli-La Pietra, e l'inizio dell' attività del Monte Olibano, che si iniziò con un lancio di scorie

Alle spalle di questo tufo verde trovasi la parete di tufo giallo da me messa in evidenza in Proprietà Giustino. Occorre a questo punto, per spiegare la posizione di questi due tufi, ammettere due ipotesi e, precisamente, o bisogna ammettere che il tufo giallo abbia presentato in questa particolare porzione un' ampia superficie a terrazza degradante verso il mare, (terrazza sulla quale potettero adagiarsi i prodotti dei crateri posteriori), oppure bisogna considerare la presenza di una faglia, in direzione Est-Ovest, che darebbe ragione non solo della posizione del tufo verde rispetto al tufo giallo, ma anche della brusca interruzione dei prodotti di Agnano.

Il tufo verde citato, compreso tra i due banchi di scorie, ha la tipica forma di lente e, nel punto di massimo diametro, ha una potenza di metri 8-10 circa. Tale potenza diminuisce procedendo verso la Cava Musa, ove a pochi metri prima della cava, alla scomparsa del tufo verde, corrisponde la fusione dei due banchi di scorie che, misti a blocchi di tufo di varia grandezza, al limite superiore, si presentano fortemente arrossati, con un colore rosso tanto più intenso, quanto più ci si avvicina alla colata trachitica del Monte Olibano, alla quale il tufo arrossato risulta sottoposto. Questo livello di scorie arrossate, declinando verso il mare, si osserva anche alla Cava Musa e, successivamente, nel tratto di strada compreso tra la Cava Musa e la seconda e più importante Cava Regia, appare quasi all' altezza del piano di strada, scomparendo in prossimità dell' edificio delle Terme Puteolane, per essere sostituito da sabbia di color grigio scuro o nero a secondo della ricchezza, o meno, di magnetite.

Di tutta la fascia costiera finora esaminata questo è il punto più interessante al fine delle conclusioni che potrò ricavare ed anche per la varietà dei prodotti che, soltanto ai Gerolomini, cedono il posto alla lava trachitica del Monte Olibano sul cui fianco sono state aperte per lo sfruttamento le due cave: Musa e Regia.

Avendo condotto su questi prodotti lavici uno studio analitico-petrografico completo, ho preferito trattare in un capitolo a parte tale argomento e, rimandando alla fine della stratigrafia la successione cronologica con la relativa interpretazione, continuo nella descrizione dei materiali affioranti nella restante zona oggetto del mio studio, che risulta ora compresa tra la Cava Regia ed il territorio urbano di Pozzuoli.

Alla stazione dei Gerolomini, difronte alle Terme Puteolane la trachite del Monte Olibano si adagia verso Ovest sulla terrazza de « La Starza », sulla cui genesi vari Autori hanno discusso. Fra questi citerò solo quelli più vicini ai nostri tempi. Secondo De Lorenzo e Simotomai (10) la terrazza sarebbe dovuta all' accumulo dei materiali provenienti dal disfacimento del cratere del Gauro (nella parte costituente il Monte Barbaro) sottoposto all' azione erosiva delle acque marine che ne provocarono in

un primo tempo la demolizione e, successivamente, con le correnti, l' accumulo del materiale eroso lungo tutto l' arco di costa interessato a tale deposito.

Secondo MINIERI (11), il primo notevole apporto alla formazione della Starza, più che alla esclusiva azione del moto ondoso battente ai piedi del Monte Barbaro, sarebbe dovuto invece « ad un' azione generale erosiva marina che interessò tutto il materiale, e non poco, che forma l'attuale bacino di Teano ».

Nella sezione che si osserva al Parco delle Terme Puteolane (prima sezione della Starza) al disotto della trachite compatta (limite Ovest della collina di Villa Cariati) compaiono delle scorie di color grigio scuro (equivalenti a quelle che si rinvengono prima della Cava Musa e soprastanti al tufo verde), ed, al disotto, le pozzolane e le pomici avana rossastre di Agnano. Segue, procedendo verso il basso, uno strato di humus dello spessore di 20 cm. circa, al disotto del quale sono presenti le pozzolane di riporto miste a sabbia soprastanti al tufo giallo, equivalenti alle pozzolane gialle ed azzurrine presenti alla stazione della Cumana a La Pietra, in proprietà Acava.

Proseguendo verso Ovest, in direzione dei Cappuccini, in una sezione successiva difronte alle Terme Terracciano (1° solco di erosione della zona Gerolomini-Pozzuoli), compare ancora la stessa serie costituita dalle pozzolane azzurrine, dai prodotti di Agnano, arricchita qui dei prodotti della Solfatara, consistenti in pozzolane e pomici grige.

La presenza dei prodotti di Agnano non è una circostanza localizzata soltanto in questa porzione della terrazza: infatti essi ricompaiono in quantità notevole nella sezione al di là delle Terme La Salute (2° solco di erosione), nella valle ove corre la condotta dell' acqua del Serino per Pozzuoli, e nel vallone successivo (3° solco di erosione) all' altezza della Villa Renda, estendendosi fin sotto al Castello, sede del Municipio di Pozzuoli, ove compare un tufo bigio, che è da considerarsi come una variazione locale del tufo giallo.

Percorrendo tutte queste valli in direzione Nord, i prodotti di Agnano vanno gradatamente assottigliandosi, mentre in contrapposizione aumentano quelli della Solfatara. Ciò è evidentissimo ai margini del secondo solco di erosione, ove dirigendosi verso la scarpata della Ferrovia dello Stato Napoli-Roma, alla scomparsa delle pozzolane avana di Agnano, corrisponde la sostituzione totale delle pozzolane grigio marrone della Solfatara. Al disotto di questo livello compare uno strato di humus di 20-30 cm. circa ed ancora al disotto sabbie e materiali di trasporto, che sono sempre da riferirsi alle pozzolane giallo-azzurrine soprastanti al tufo giallo.

Nella serie tufo giallo-Solfatara manca quindi quella di Agnano, indizio di una completa erosione subita da tali materiali in questo punto. Al contrario però i margini di questa valle, scavata nelle pozzolane avana di

Agnano, resistettero all' azione disgregatrice delle acque, e potettero erigersi quasi come pilastri al trasporto dei prodotti della Solfatara che, contro questa barriera, trovarono un saldo appoggio.

Dal complesso di tutte le osservazioni risulta che la maggior parte dei prodotti soprastanti al tufo giallo appartengono ai centri eruttivi di Agnano, Monte Olibano e Solfatara. Il tufo verde presente prima della Cava Musa, rappresenta un prodotto appartenente al cratere di Monte Olibano, eruttato anteriormente alla fase lavica vera e propria. La bocca del Monte Olibano infatti iniziò la sua attività con l' emissione di cenere e quindi di scorie, che in quantità notevoli, costituirono la piattaforma sulla quale andò ad adagiarsi la lava trachitica.

Gli unici prodotti che si presentano di incerta interpretazione sono rappresentati da quelle pozzolane giallo-azzurrine, finemente stratificate presenti alla stazione della Cumana a La Pietra ed in proprietà Giustino in S. Gennaro Pozzuoli. Avendo avuto da principio il dubbio che tali prodotti fossero sedimentati in ambiente marino ho fatto eseguire nell' Istituto di Geologia una accurata ricerca allo scopo di mettere in evidenza una eventuale microfauna marina. Tale ricerca è risultata negativa, per cui devo concludere che le pozzolane in questione rappresentano un prodotto di trasporto dalle acque superficiali, derivanti dalla disgregazione del tufo giallo e dalla successiva sedimentazione, che dovette avere luogo nell' intervallo di tempo compreso tra la fine dell' attività del cratere di Pozzuoli e l' inizio della attività di Agnano.

b) *Ricerche petrografiche.*

Allo scopo di accostare chimicamente questi prodotti ad altri già noti e studiati ho effettuato l' analisi sia delle pozzolane gialle rimaneggiate, che di quelle azzurrine.

Il materiale è stato raccolto a:

6) Pozzolane gialline soprastanti al tufo giallo presenti alla stazione di La Pietra (Ferrovia Cumana). Strato al disopra della prima galleria.

7) Pozzolane azzurrine a cui fanno passaggio le pozzolane gialle, raccolte nella località innanzi citata.

Ed ecco i risultati analitici rinvenuti:

	6	7
SiO_2	50.50	53.60
TiO_2	0.19	0.26
ZrO_2	0.08	0.11
Al_2O_3	20.04	16.56
Fe_2O_3	4.56	5.73
FeO	0.18	0.10
MgO	1.10	1.65
MnO	0.14	0.14
CaO	5.60	4.49
BaO	0.04	0.04
K_2O	2.04	4.03
Na_2O	3.70	2.21
P_2O_5	0.19	0.14
SO_3	0.07	0.06
Cl	1.16	1.30
CO_2	1.98	1.95
H_2O^-	6.30	6.40
H_2O^+	2.12	1.22
	100.08	99.99
O = Cl	0.29	0.32
	99.79	99.67

Avendo quindi detratto dal CaO totale le quantità spettanti a CO_2 per considerare l'ione Ca^{++} sotto forma di $CaCO_3$, ed a P_2O_5 per considerarlo sotto forma di $Ca_3(PO_4)_2$, ed avendo sottratto agli alcali la quantità di Na

spettante a Cl per considerare questo ione presente sotto forma di NaCl, ho calcolato i valori di NIGGLI che riporto qui accanto:

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{al}{c+alc}$	si°
6)	217	51	23	13	13	0.39	0.31	1.04	1.11
7)	255	46	32	10	12	0.10	0.36	2.09	1.72

Dall' interpretazione dei risultati analitici e dei valori del NIGGLI che ne risultano si può affermare che la composizione di queste pozzolane giallo-azzurrine si approssima a quella del tufo giallo studiato: delle analisi 6 e 7 la prima (quella corrispondente alla pozzolana giallina) rappresenta un prodotto più ricco di minerali sialici, mentre la seconda (quella corrispondente alla pozzolana azzurrina) sembra più ricca di minerali femici.

Comunque per entrambi bisogna ammettere un rimaneggiamento, non trattandosi di prodotti fresch

PARTE TERZA

Ricerche sui prodotti lavici del Monte Olibano.

a) *Descrizione stratigrafica.*

Al disopra dei prodotti di Agnano, al di sopra della lente tufacea verde compresa tra i due banchi di scorie presenti nella zona tra il vallone « La Bolla » e la Cava Musa, compare una lava di natura trachitica di estensione modesta, ma di potenza abbastanza considerevole, attribuita al cratere di Monte Olibano. Tale denominazione, data al monte dai Greci, sta a significare « monte sterile », vale a dire privo di vegetazione. Secondo il PALATINO (12) il Monte Olibano, chiamato successivamente Monte delle brecce, deve la sua origine all' attività vulcanica della Solfatara, ipotesi questa che gli studiosi hanno però completamente esclusa. Mentre la denominazione di Monte Olibano è rimasta nella letteratura scientifica, è al contrario sconosciuta dagli abitanti della zona, che chiamano questo complesso lavico collina del S. Salvatore. La carta topografica dell'Istituto Geografico Militare, (Foglio 118, III N. E.) indica i nomi di Villa Cariati e Rione Campanola.

Comunque questa lava, che chiuse tutto un periodo di attività del

cratere dell' Olibano, è delimitata dai seguenti confini: a Sud dal mare (dalle cui acque emergono, in special modo all' altezza della Cava Regia, grandi blocchi) a Sud-Sud-Ovest risulta compresa nell' arco Contrada Perone - Cava Musa - Proprietà Monti - S. Gennaro - orlo meridionale del cratere della Solfatara - Gerolomini - La Starza - Terme Puteolane.

Essa non costituisce un unico complesso ma è suddivisa in due cupole laviche e precisamente la prima, compresa tra la Stazione dei Gerolomini e la Contrada Perone, costituisce la collina di Villa Cariati (altezza m. 166), mentre la seconda, compresa tra l' orlo meridionale della Solfatara ed il Preventorio Umberto di Savoia costituisce la collina del Rione Campanola (altezza m. 199). Le due cupole laviche pur essendo costituite dallo stesso tipo di trachite, si differenziano profondamente per la struttura.

Iniziamo dalla collina del Rione Campanola: essa non risulta formata da un unico ammasso di lava, ma al contrario, a quanto si osserva in superficie, da numerosi blocchi trachitici, tutti di dimensioni variabilissime ma sempre di grandi proporzioni, saldati insieme da pozzolane, blocchi di tufo che appartengono ai prodotti di esplosione del cratere della Solfatara. Se questa cupola quindi risulta non solo disgregata, ma anche accompagnata dai prodotti della Solfatara, ciò sta a dimostrare che essa fu direttamente interessata alla successiva esplosione di questo cratere flegreo. E' anche spiegata allora la ragione per cui nei fianchi non furono mai aperte cave, quantunque alla spiegazione concorre anche un altro fattore qual' è quello dovuto all' alterazione della roccia a causa dell' esposizione ai vapori della Solfatara che trasformano la trachite in una roccia friabile e farinosa. Dei vari stadi di alterazione della trachite e della formazione dei vari prodotti di decomposizione si occupò il Rittmann (13) in un suo lavoro.

La cupola di Villa Cariati è invece costituita da un unico complesso trachitico compatto, il che dimostra come queste lave non furono affatto interessate agli eventi vulcanici successivi. Alla integrità della sua costituzione e quindi alla compattezza della roccia, che trova impiego nelle costruzioni stradali, questa lava deve il suo sfruttamento, fatto questo che ha permesso di poter studiare tutto il materiale che si celava al disotto del grigio mantello trachitico. La estensione della lava che costituisce la collina di Villa Cariati è maggiore rispetto a quella che ha formato la collina del Rione Campanola: comparendo infatti all' altezza della Contrada Perone si estende fino ai Gerolomini, ove le sue ultime propaggini, di fronte all' edificio delle Terme Puteolane, sovrastano le pozzolane che costituiscono la terrazza de « La Starza », che qui ha inizio.

Nel fianco sud della lava, vale a dire sul lato prospiciente al mare, sono state aperte due cave: la prima che si incontra venendo da Bagnoli, è chiamata Cava Musa, la quale, attiva nel passato, è stata da tempo abbandonata; la seconda, che trovasi poco prima dell' edificio delle Terme Puteolane, di gran lunga più importante, è nota col nome di Cava Regia.

I primi sfruttamenti di questa cava, più o meno certi, secondo gli storici, rimontano al 1447, epoca in cui il Re di Napoli Alfonso I° d'Aragona ordinò di adibire la roccia della Cava, detta poi Regia, per la costruzione del Molo della città di Napoli. Nel 1453 la roccia fu adibita ad uso bellico, nel senso che fu adoperata per le bombarde del Castelnuovo di Napoli e per le regie navi comandate da Pietro Sirvent e Giovangregorio Junques. Il vero e proprio taglio di questa cava, si ebbe nel 1568, anno in cui il Vicerè di Napoli Don Parafan de Rivera, Duca di Alcalà, fece tagliare trasversalmente porzione della falda meridionale della cava, confinante col mare, per continuare la strada che doveva congiungere Bagnoli con Pozzuoli. Tale strada, dal nome del Vicerè, fu chiamata « Via Rivera » e sostituì l'antica « Via Superiore » che congiungeva Napoli con Pozzuoli attraverso il Monte Olibano, i monti Monti Leucogei e la Solfatara. A questi primi tagli della cava e di tutta la collina numerosi altri ne seguirono: tra i più noti si possono citare quello fatto effettuare dal Re Carlo di Borbone, fatto poi continuare del figlio Ferdinando IV, al fine di impiegare la roccia per le fondazioni del molo di Napoli, delle vie litorali della città, e per la costruzione di scogliere atte a preservare le strade costiere dalla azione del mare (14). Successivamente la trachite della Cava Regia, opportunamente levigata, fu usata a scopo ornamentale: qualche applicazione si ha a Calstelnuovo, basi dell' arco trionfale e finestre della Sala dei Baroni, nella Chiesa di Donnaregina, nell' attuale sede del Banco di Napoli allo Spirito Stanto, nel colonnato centrale del Tempio di S. Francesco di Paola, la cui costruzione fu iniziata nel 1817 (15). Attualmente la cava, del demanio del Comune di Pozzuoli, viene ceduta ad imprese private in appalto per lo sfruttamento. Dall' impresa Cidonio, attuale Ditta appaltante, ho avuto il permesso di entrare nella Cava a mio piacimento, per cui ho potuto compiere tutti i rilievi sia sul piano di base, il cui accesso è quanto mai agevole, sia sul limite superiore della cava il cui accesso, oggi, è praticamente impossibile. All' epoca in cui ho compiuto questi rilievi ed ho raccolto il materiale per lo studio, l' accesso al versante superiore era ancora possibile soltanto attraverso la proprietà Monti sita sulla collina di S. Gennaro: allo stato attuale il continuo brillare delle mine per lo sfruttamento della roccia ha profondamento modificato la configurazione della cava, in special modo quella del limite superiore, in quanto, il materiale di copertura, come specificherò meglio in seguito, non essendo molto adatto agli scopi ed all' impiego a cui la trachite viene adibita, viene rapidamente cavato senza alcun accorgimento tecnico e trasportato via. Alla luce dei nuovi tagli e delle nuove osservazioni condotte sul terreno, le colate laviche del cratere del Monte Olibano risultano chiaramente in numero di due: la prima, che costituì la cupula di Villa Cariati, per la natura stessa del terreno in pendenza verso il mare, estese le sue propaggini in direzione di La Pietra raggiungendo il mare, come

stanno a testimoniare i blocchi che emergono della superficie stessa dell' acqua.

La lava, raggiungendo il massimo spessore all'altezza della Cava Regia, andò decrescendo di potenza verso Ovest, e, modellandosi sui precedenti prodotti, in parte erosi, riempì la valle fino all' attuale livello della stazione ferroviaria dei Gerolomini. Alla chiusura di questo primo atto eruttivo non seguì immediatamente il secondo, ma nell' intervallo vi fu un periodo di stasi dell'attività, per cui le acque superficiali ruscellarono, e successivamente deposero, materiali vari di trasporto come pozzolane rimaneggiate e sabbie. La seconda colata, avendo avuto un maggiore espandimento verso Ovest, colmò la valle dei Gerolomini e, poggiando, in parte soltanto, sui materiali precedenti, costituì la cupola del Rione Campanola.

A conferma di questa interpretazione militano le seguenti prove, chiare ed evidenti:

1ª) In località Gerolomini, al limite Ovest della cupola di Villa Cariati, poco prima dell' attacco della cupola alla terrazza de « La Starza », la lava trachitica è interrotta da una lente di prodotti scoriacei misti a sabbia e ceneri di color grigio chiaro, ricomparendo al disopra di tali prodotti fino all' altezza del terreno vegetale. Riportando la successione stratigrafica dal basso verso l' alto si ha: (Tavola VII, fig. 2).

A_1) Roccia trachitica compatta di color grigio cenere. Potenza dello strato affiorante m. 15-20.

B_1) Strato costituito da scorie, pozzolane e sabbie di color grigio chiaro. Potenza dello strato m. 4 nel punto centrale della lente che si assottiglia sia verso Est che verso Ovest.

C_1) Roccia trachitica compatta di color grigio cenere della potenza di m. 8-10. La presenza delle scorie indica appunto un' interruzione.

2ª) Osservando dal piano di base il fronte della Cava Regia, in un primo momento si è portati ad osservare un' unica parete trachitica, ma tale uniformità risulta poi solo apparente, quando ci si pone al limite superiore della cava. Dal basso verso l' alto si ha infatti la seguente successione stratigrafica:

A) Roccia trachitica costituente la prima colata del Monte Olibano. Tale roccia è soddivisa in tre tipi, così differenziati:

1) Zona di base: roccia trachitica compatta di colore grigio cenere. Potenza dello strato metri 20-25.

2) Zona intermedia: roccia trachitica compatta di color grigio cenere con chiazze chiare differenziate dalla massa. Potenza dello strato metri 30 - 40.

3) Zona superiore: roccia trachitica di colore bianco latte, poco compatta, farinosa, sgretolabile tra le mani, fortemente fumarolizzata. Potenza dello strato m. 10 - 15.

B) Pozzolane gialline, evidentemente rimaneggiate, abbastanza compatte. Potenza dello strato cm. 20 - 30.

C) Ceneri grigie ad elementi finissimi, molto friabili. Potenza dello strato cm. 50 - 60.

D) Straterelli ad elementi finissimi sabbiosi, alternati con piccolissimi strati di pozzolane. Potenza complessiva dello strato cm. 70 - 80.

E) Roccia trachitica di copertura di color grigio chiaro a struttura porfirica, nettamente differenziata dalla trachite di base (2ª colata del M. Olibano). Potenza nello strato metri 5 - 6.

L' interpretazione della presente sezione, oltre che avvalorare l' ipotesi della duplice colata lavica, per la presenza della trachite farinosa, che rappresenta lo strato superiore della trachite A, permette anche la supposizione di una fase fumarolica sviluppatasi alla fine della prima colata di lava. Del resto tale supposizione è avvalorata, come dirò tra breve, anche dall' indagine microscopica.

b) *Ricerche petrografiche.*

L' unica analisi chimica effettuata sulla lava trachitica del Monte Olibano è dovuta al Narici (16), il quale trattò di questa roccia nell' ambito di tutta una serie di ricerche sui vari tipi di trachiti presenti nei Campi Flegrei.

Riporto l' analisi della trachite plagioclasica, con i relativi valori di Niggli nella pagina seguente.

Poichè uno studio completo sulle lave del Monte Olibano non è stato fino ad oggi compiuto, scopo della presente ricerca è quella di apportare un contributo alla petrografia chimica di questa tipica lava flegrea. La raccolta delle rocce studiate è stata fatta per la maggior parte alla Cava Regia e, subordinatamente, al Parco delle Terme Puteolane, in località Gerolomini (Pozzuoli).

L' aspetto macroscopico delle rocce trachitiche che costituiscono le due colate laviche del Monte Olibano è alquanto variabile. Si distinguono tre tipi fondamentali e precisamente quello di base di color grigio cenere apparentemente uniforme in cui i fenocristalli non spiccano a causa del colore della massa fondamentale, quello intermedio, farinoso, in cui sono evidenti i soli cristalli di felspato ed uno superiore (materiale di copertura della Cava Regia) in cui spiccano i fenocristalli di felspato molto evidenti nella massa fondamentale color grigio scuro.

Trachite plagioclasica — Lava del Monte Olibano (Pozzuoli) (An. Narici).

SiO_2	57.10
TiO_2	0.55
Al_2O_2	17.92
Fe_2O_3	4.94
FeO	0.80
MnO	0.17
MgO	0.92
CaO	4.52
K_2O	8.98
Na_2O	3.60
P_2O_5	0.14
Cl	0.19
H_2O^-	0.11
H_2O^+	0.42
	100.36
O = Cl	0.04
	100.32

Valori di Niggli

si	188
al	34.5
fm	19.5
c	15.5
alc	30.5
k	0.62
mg	0.25
$\frac{al}{c + alc}$	0.96
si°	0.88

In sezione sottile, nella massa fondamentale prevalentemente sanidinica, a struttura tipicamente fluidale, sono presenti:

Sanidino in fenocristalli, allungati, geminati in prevalenza secondo la legge di Carlsbad e più raramente secondo la legge di Baveno, anche se in proporzioni molto minori. Angolo degli assi ottici praticamente nullo. Piano degli assi ottici parallelo a (010).

Plagioclasio, cristalli geminati secondo la legge albite-Carlsbad, corrispondente al tipo labradoritico (60 °/₀ An.). Carattere ottico positivo. Angolo degli assi ottici 2V = 80°.

Pirosseno, talvolta in fenocristalli, abbastanza frequentemente costituiti da un nucleo verde chiaro circondato da un bordo di color verde più scuro. Sia nei fenocristalli che in quelli più piccoli, non si notano sensibili zonature. Lo schema del pleocroismo è il seguente:

a = verde scuro bluastro ; *b* = giallo verdastro ; *c* = verde-giallastro. Angolo degli assi ottici 2V = 55°-60°.

Il pirosseno che nella trachite di base della Cava Regia è in prevalenza verde, si presenta invece nella trachite farinosa e bianca, o in via di alterazione o completamente alterato. In entrambi i casi comunque presenta un tono generale giallastro più spiccato; delle volte è circondato da una zona periferica rossastra ed ancora più all' esterno da un anello opaco, costituito in prevalenza da ossidi di ferro. Tale alterazione fa quindi ammettere la presenza di sostanze volatili che esercitarono la loro azione nella fase fumarolica che certamente ebbe luogo al termine della prima colata lavica.

Magnetite sotto forma granulare, ovunque presente.

Apatite in grandi cristalli presente nella trachite farinosa, con pleocroismo dal marrone chiaro al marrone più scuro in direzione dell' asse ottico (17).

Biotite in lamine molto sottili, a contorno irregolare, rarissima.

Presente anche talvolta un minerale femico, tutto trasformato in ossidi di ferro, o *anfibolo* o *biotite*.

Frammenti vetrosi torbidi, non trasparenti presenti solo nella trachite alterata.

Le analisi chimiche delle varie rocce prelevate alla Cava Regia o al Parco delle Terme Puteolane sono riportate, con le relative indicazioni, nei quadri seguenti. I valori del NIGGLI e le « norme molecolari » calcolate secondo il metodo proposto dal NIGGLI (18) (esclusivamente per quelle rocce ove ne è stata possibile l' applicazione) vengono riportati accanto ai risultati dell' analisi mineralogica quantitativa, eseguita al microscopio con l' aiuto del tavolino integratore, su un campione tipo.

Essendo la riportazione di Q, fra i valori diversi che figurano nella base, arbitraria quando non si conosca la composizione chimica di uno o più minerali a composizione variabile (nel caso specifico del pirosseno flegreo del quale non si conosce con precisione l' esatta composizione), non è stato possibile effettuare il calcolo delle « varianti » (19).

MATERIALI COSTITUENTI LA « CAVA REGIA »

ANALISI VIII

Trachite di base della Cava. Strato A: zona di base (*Analista* SINNO).

SiO_2	57.72
TiO_2	0.20
ZrO_2	0.03
Al_2O_3	19.56
Fe_2O_3	4.61
FeO	0.95
MnO	0.12
MgO	1.60
CaO	3.56
BaO	0.07
K_2O	7.30
Na_2O	4.10
P_2O_5	0.24
SO_3	0.30
Cl	0,22
H_2O^-	0.04
H_2O^+	0.16
	100.78
O=Cl	0.05
	100.73

VALORI DEI NIGGLI

si	185
al	38
fm	22
c	13
alc	27
k	0.54
mg	0.35
$\frac{al}{c + alc.}$	0.91
si^0	0.88

TIPO MAGMATICO:

Monzonitsienitico

COMPOSIZIONE MINERALOGICA OSSERVATA

(% in volume)

Fenocristalli di Felspato	7%	Sanidino 6%; Labradorite 1%
Massa fondamentale (Sanidino)	68%	
Pirosseno	18%	
Magnetite ed ossido ferro	7%	
	100.0	

BASE

Q	34.8	34.8 = Q
Kp	25.9	55.6 = L
Ne	21.9	
Cal	7.8	
Cs	1.3	9.6 = M
Fs	4.2	
Fa	1.0	
Fo	3.1	
Ru	—	
	100.0	

CATANORMA

Or	41.3	85.8
Ab	28.2	
An	12.5	
Ne	3.8	
Wo	7.5	10.6
Fo	3.1	
Mt	2.1	
Em	1.5	

ANALISI IX

Trachite dello strato A : zona intermedia (*Analista* SINNO).

		VALORI DEL NIGGLI	
SiO_2	56.48		
TiO_2	0.25	si	182
ZrO_2	0.04	al	38
Al_2O_3	20.18	fm	22
Fe_2O_3	4.35	c	14
FeO	0.25	alc	26
MnO	0.12	k	0,41
MgO	1.88	mg	0,40
CaO	4.02	$\frac{al}{c + alc}$	0,95
BaO	0.09		
K_2O	5.20	si^0	0,89
Na_2O	4.90		
P_2O_5	0.40		
SO_3	0.20		
Cl	0.30		
H_2O^-	0.02		
H_2O^+	0.06		
	99.74		
O = Cl	0.07		
	99.67		

TIPO MAGMATICO:

Monzonitsienitico

BASE			CATANORMA		
Q	34.60	34.6 = Q	Or	28.5	84.2
Kp	18.5	55.8 = L	Ab	36.8	
Ne	26.6		An	16.4	
Cal	10.7		Ne	2.5	
Cs	0.7	9.6 = M	Wo	9.8	13.5
Fs	3.6		Fo	3.7	
Fa	1.4		Mt	1.7	
Fo	3.9		Em	0.6	
Ru	—				
	100.0				

ANALISI X

Trachite fumarolizzata dello strato A : zona superiore (*Analista* SINNO).

SiO_2	56.04
TiO_2	0.10
ZrO_2	0.04
Al_2O_3	19.50
Fe_2O_3	4.45
FeO	0.71
MnO	0.10
MgO	1.80
CaO	3.84
BaO	0.14
K_2O	7.32
Na_2O	4.70
P_2O_5	0.50
SO_3	0.50
Cl	0.10
H_2O^-	0.24
H_2O^+	0.44
	100.52
O = Cl	0.02
	100.50

VALORI DEL NIGGLI

si	181
al	37
fm	20
c	13
alc	30
k	0.49
mg	0.45
$\frac{al}{c + alc}$	0.86
si^0	0.82

TIPO MAGMATICO:

Monzonitsienitico

BASE

Q	30.7	30.7 = Q
Kp	26.2	
Ne	25.6	57.6 = L
Cal	5.8	
Cs	2.7	
Fs	4.5	
Fa	0.8	11.7 = M
Fo	3.7	
Ru	—	
	100.0	

CATANORMA

Or	42.1	
Ab	22.6	88.2
An	9.8	
Ne	13.7	
Wo	5.1	8.3
Fo	3.2	
Mt	1.5	
Em	2.0	

Analisi XI — XII — XIII

An. XI — *Pozzolane gialline rimaneggiate (strato B)* (An. Sinno).

An. XII — *Ceneri grige ad elementi finissimi (strato C)* (An. Sinno).

An. XIII — *Ceneri ad elementi finissimi misti a pozzolane (strato D)* (An. Sinno).

	XI	XII	XIII
SiO_2	54.60	54.36	54.40
TiO_2	0.12	0.10	0.10
ZrO_2	0.03	0.04	0.04
Al_2O_3	18.77	19.25	19.54
Fe_2O_3	3.10	2.95	3.60
FeO	1.78	1.95	0.80
MnO	0.10	0.10	0.10
MgO	1.86	1.36	1.70
CaO	3.92	4.34	4.48
BaO	0.08	0.07	0.08
K_2O	6.05	4.96	4.60
Na_2O	4.02	4.70	4.30
P_2O_5	0.55	0.35	0.30
SO_3	0.45	0.30	0.25
Cl	0.22	0.14	0.19
H_2O^-	0.88	1.04	0.36
H_2O^+	3.98	4.60	5.54
	100.51	100.61	100.38
O = Cl	0.05	0.03	0.04
	100.46	100.58	100.34

Valori del Niggli

	si	al	fm	c	alc	k	mg	$\frac{c + alc.}{al}$	si°
XI	188	37.5	22	14	26.5	0.48	0.42	0.93	0.88
XII	181	38	19	15	28	0.37	0.37	0.87	0.85
XIII	186	39	21	16	24	0.39	0.42	0.96	0.94

Analisi XIV

Trachite porfirica superiore. Seconda colata lavica del M. Olibano (Strato E).
(*Analista* Sinno).

SiO_2	58.64
TiO_2	0.10
ZrO_2	0.04
Al_2O_3	21.24
Fe_2O_3	3.18
FeO	1.74
MnO	0.10
MgO	0.46
CaO	3.36
BaO	0.04
K_2O	5.56
Na_2O	5.30
P_2O_5	0.25
SO_3	0.22
Cl	0.13
H_2O^-	0.02
H_2O^+	0.30
	100.68
O = Cl	0.03
	100.65

VALORI DEL NIGGLI

si	202
al	43
fm	15
c	12
alc	30
k	0.39
mg	0.14
$\frac{al}{c + alc}$	1.02
si^0	0.91

TIPO MAGMATICO:

Leucosienitico

BASE

Q	36.8	36.8 = Q
Kp	19.5	
Ne	28.1	57.2 = L
Cal	9.6	
Sp	0.8	
Cs	—	
Fs	3.0	
Fa	1.8	6.0 = M
Fo	0.4	
Ru	—	
	100.0	

CATANORMA

Or	30.2	
Ab	40.9	87.7
An	15.0	
Ne	1.6	
Wo	8.9	9.7
En	0.3	
Fo	0.5	
Mt	1.9	
Sp	0.7	

Materiali raccolti al « Parco delle Terme Puteolane ».

Analisi XV.

Trachite inferiore della prima colata. Gerolomini (*Analista* Sinno).

SiO_2	57.30
TiO_2	0.10
ZrO_2	0.04
Al_2O_3	19.38
Fe_2O_3	4.76
FeO	1.60
MnO	0.14
MgO	1.94
CaO	3.54
BaO	0.08
K_2O	6.48
Na_2O	3.96
P_2O_5	0.28
SO_3	0.30
Cl	0.14
H_2O^-	0.14
H_2O^+	0.18
	100.36
O = Cl	0.03
	100.33

VALORI DEL NIGGLI

si	185
al	37
fm	25
c	12
alc	26
k	0.50
mg	0.37
$\frac{al}{c + alc}$	0.97
si^0	0.90

TIPO MAGMATICO:

Monzonitsienitico

BASE

Q	33.7	33.7 = Q
Kp	22.2	53.5 = L
Ne	21.8	
Cal	9.5	
Cs	0.5	12.8 = M
Fs	4.8	
Fa	3.6	
Fo	3.9	
Ru	—	
	100.0	

CATANORMA

Or	36.4	82.2
Ab	35.8	
An	10.0	
Ne	9.2	
En	0.9	14.0
Fo	3.9	
Mt	2.6	
Em	1.2	

ANALISI XVI

Trachite superiore della seconda cotalà. Gerolomini (Analista SINNO).

SiO_2	57.80
TiO_2	0.10
ZrO_2	0.04
Al_2O_3	19.35
Fe_2O_3	4.36
FeO	1.60
MnO	0.34
MgO	1.34
CaO	3.20
BaO	0.08
K_2O	4.50
Na_2O	5.90
P_2O_5	0.24
SO_3	0.40
Cl	0.14
H_2O^-	0.14
H_2O^+	0.58
	99.91
O = Cl	0.03
Totale	99.88

VALORI DEL NIGGLI

si	194
al	38
fm	21
c	12
alc	29
k	0.32
mg	0.30
$\frac{al}{c+alc}$	0.95
si°	0.90

TIPO MAGMATICO:

Monzonitsienitico

BASE

Q	34.2	34.2=Q
Kp	15.4	
Ne	32.7	55.7 L
Cal	7.6	
Cs	1.0	
Fs	4.5	10.1=M
Fa	1.9	
Fo	2.7	
Ru	—	
	100.0	

CATANORMA

Or	24.5	
Ab	48.8	87.3
An	12.0	
Ne	2.0	
Wo	7.2	9.9
Fo	2.7	
Mt	2.3	
Em	0.5	

CONCLUSIONI

La serie dei prodotti rilevati nella zona La Pietra-Pozzuoli, ed il relativo studio analitico-petrografico permette di trarre le seguenti conclusioni:

1° — I prodotti che si rinvengono da La Pietra fino a Pozzuoli e che costituiscono la base di tutti i prodotti affioranti appartengono al secondo periodo flegreo e costituiscono un classico tufo giallo che, ove con maggiore ove con minore potenza, si presenta comunque sempre interessato a fenomeni di assestamento come si può rilevare dalla presenza di piccoli salti e piccole discordanze e dalla abbondante fessurazione.

2° — La parete di tufo giallo presente alla base del Preventorio « Umberto di Savoia » in proprietà Giustino, da me messa in evidenza, con la sua composizione chimica perfettamente analoga a quella dei tufi di La Pietra e di Pozzuoli conferma l' ipotesi, già formulata dal VENTRIGLIA (20), di un unico apparato craterico il cui centro esplosivo è da ricercarsi, presumibilmente, nel tratto di mare antistante al molo di Pozzuoli. Infatti la parete del Preventorio è in prosieguo della parete tufacea del molo di Pozzuoli e della parete tufacea di La Pietra. I tufi facenti parte di questo centro eruttivo sono generalmente più basici di quelli del Vomero.

3° — Tra la chiusura dell' attività del cratere di Pozzuoli-La Pietra e l' inizio dell' attività del cratere di Agnano (che segnò l' apertura del terzo periodo flegreo antico), dovette intercorrere un lungo intervallo di tempo, in cui si verificarono degli assestamenti tettonici. Ciò viene avvalorato dalle fratture presenti nel tufo giallo, dalla presenza dei grandi solchi di erosione, colmati poi dai prodotti successivi ed infine dalla presenza dei numerosi strati di pozzolane giallo-azzurrine soprastanti al tufo giallo (riscontrate a La Pietra, in proprietà Acava, a Pozzuoli S. Gennaro in proprietà Giustino, ed al vallone La Bolla).

4° — Immediatamente dopo la deposizione dei prodotti di Agnano, ebbe luogo l'esplosione del cratere di Monte Olibano che, apertosi con lanci di scorie e ceneri, fu in seguito caratterizzato da una tipica fase lavica, che in un primo tempo formò la cupola detta di « Villa Cariati » e, successivamente, dopo un certo intervallo, con una seconda colata, costituì la cupola detta del « Rione Campanola ».

5° — Terminata l' attività del Monte Olibano, senza alcun intervallo di tempo seguì l' esplosione della Solfatara. Questo cratere aprendosi un varco attraverso la lava della cupola della Campanola, perforò la trachite che fu successivamente rigettata sotto forma di blocchi di varie dimensioni, che si trovano frammisti ai prodotti stessi della Solfatara. Per questa ragione, la Campanola, direttamente interessata alla esplosione ed alla formazione

di questo nuovo cratere, fu sconvolta nella sua costituzione, differenziandosi nettamente dalla cupola di Villa Cariati, che estranea a tale esplosione, rimase integra nella sua struttura.

6° — Per la presenza di rocce notevolmente alterate si può infine concludere che la zona tutta del Monte Olibano fu interessata ad una intensa attività fumarolica, che, per il passato, fu certamente ancora più intensa di quanto non sia attualmente. Tutta la zona compresa tra Bagnoli e Pozzuoli è infatti ancora oggi sede di postumi di una attività vulcanica (ne sono prova le sorgenti termali presenti e sfruttate a scopo terapeutico), alla quale vanno ad associarsi i fenomenti bradisismici che investono tutto l' arco di costa costituente il golfo di Pozzuoli (21).

BIBLIOGRAFIA

1. SCHERILLO A. *Petrografia chimica dei tufi flegrei: 1) il tufo giallo.* Rend. Acc. Scienze fisiche e mat., Serie 4, Vol. XVII. Napoli, 1950.
2. SCHERILLO A. *Op. cit.*
3. SALVATORE E. e FRIEDLANDER F. *Contributo allo studio del tufo napoletano: Su una varietà verde.* Zeit. für Vulk., Vol. X. Berlino, 1926-27.
4. RITMANN A. e SALVATORE E. *Contributo allo studio dei tufi verdi della regione flegrea.* Zeit. für Vulk., Vol. XI. Berlino, 1927-28.
5. D'ERASMO G. *Studio geologico dei pozzi profondi della Campania.* Boll. Soc. Nat. in Napoli, Vol. 43. Napoli, 1931.
6. DAINELLI G. *Guida alla escursione dei Campi Flegrei.* Atti XI Congresso Geogr. Ital., Vol. IV. Napoli, 1930.
7. IPPOLITO F. *Su alcuni pozzi profondi del Napoletano.* Boll. Soc. Nat. in Napoli, Vol. LIII. Napoli, 1942.
8. IPPOLITO F. *Studi sulla costituzione geologica del sottosuolo di Napoli.* Boll. Soc. Nat. in Napoli, Vol. LVII. Napoli, 1948.
9. SINNO R. *Su alcuni pozzi profondi perforati alla base del Gauro (Campi Flegrei).* Boll. Soc. Nat. in Napoli, Vol. LXVI. Napoli, 1955.
10. DE LORENZO G. e SIMOTOMAI H. *I crateri del Monte Gauro nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., Serie II, Vol. XVI. Napoli, 1915.
11. MINIERI V. *La terrazza della Starza nei Campi Flegrei.* Rend. Acc. Scienze Fis. e mat. Serie 4, Vol. XVII. Napoli, 1950.
12. PALATINO L. *Storia di Pozzuoli e contorni.* Napoli, 1826.
13. RITMANN A. *Der Alkalitrachjt der Solfatara und seine Zersetzung durch fumarolengas.* Schweizerische Min. und Petrog. Mitteilungen, Band XIV, H. I. Zurigo, 1934.
14. REBUFFAT A. *Sinossi dei materiali da costruzione della provincia di Napoli.* Relazione del V Congresso degli Ing. ed Archit. Ital. N. 4. Benevento, 1925.
15. PENTA F. *Materiali da costruzione dell'Italia meridionale.* Vol. I. Napoli, 1935.

16. NARICI E. *Contributo alla petrografia chimica delle provincia magmatica Campana e del Monte Vulture*. Zeit. für Vulk., Vol. XIV. Berlino, 1931.

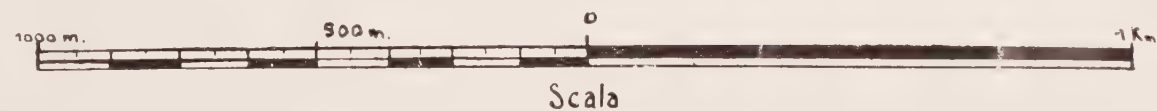
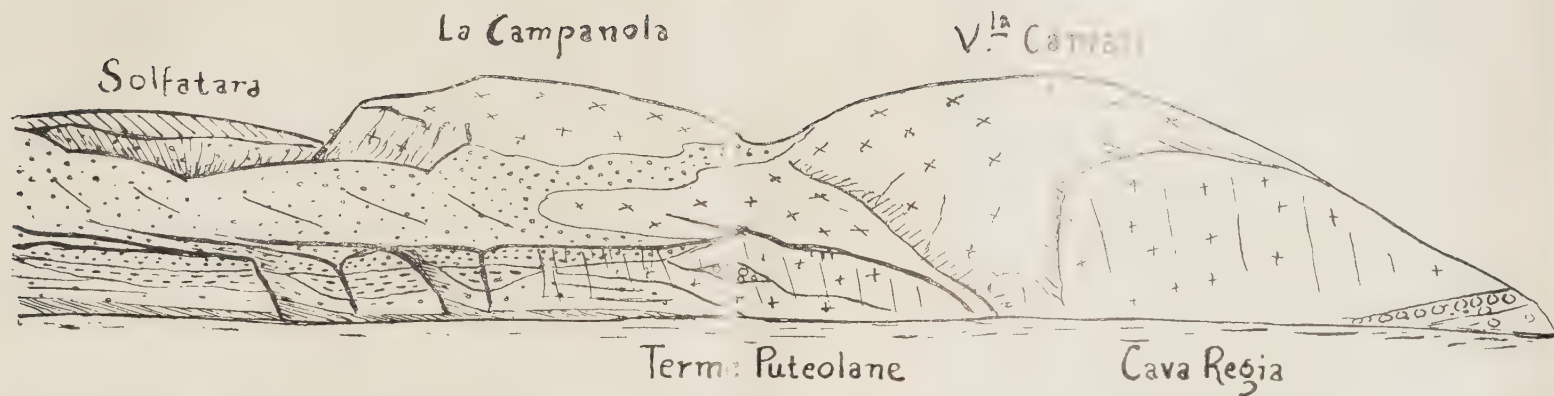
17. SCHERILLO A. *Descrizione di alcune lave del Demavend (Persia)*. Period. di Min., Anno VI. Roma, 1935.

18. NIGGLI P. *Über Molekularnormen zur gesteinsberechnung*. Schweiz. Min. Mitt., Band XVI. Zurigo, 1936.

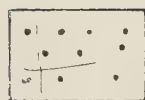
19. FORNASERI M. *Ricerche petrografiche sul Vulcano Laziale. I proietti inclusi nei tufi*. Period. di Min., Anno XX, N. 2-3. Roma, 1951.

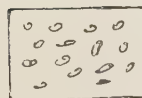
20. VENTRIGLIA U. *Rilievo geologico dei Campi Flegrei. (Zona centrale tra la direttissima Napoli-Roma e la collina dei Camaldoli)*. Boll. Soc. Geolog. Ital., Vol. LXIX. Roma, 1951.

21. PARASCANDOLA A. *I fenomeni bradisismici del Serapeo di Pozzuoli*. Napoli, 1947.

CARTA GEOLOGICA DEL TRATTO
POZZUOLI - BAGNOLI
Solfatara
Anfit.
S.M.O.
Campanola
199
S. Gennaro
Prevent.
V.la Renda
Cratere di Agnano
C. Avallone
M. Ruspino
T.re Piscicelli
166
V.la Cariati
155
108
C. Perrone
V.la Arabia
C. Amorosa
50
i Cappuccini
Pozzuoli
Gerolomini
C. Regia
la Pietra
Bagnoli
Tufo giallo
Trachite del M. Olibano
Prodotti di Agnano
Prodotti della Solfatara
Scorie con tufo interposto
Prodotti di Astroni
1000 m.
500 m.
0
1 Km.
Scala

Panorama geologico del tratto costiero compreso tra Gerolomini (Cava Regia) e Cappuccini (Pozzuoli).

1 *Tufo giallo*

2 *Prodotti di Agnano*

3 *Scorie inferiori*

4 *Tufo verde interposto*

5 *Scorie superiori*

6 *Trachite del M. Olibano*

7 *Prodotti della Solfatara*

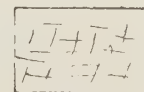
8 *Prodotti di Astroni*

9 *Terreni di riporto*

Fig. 1. — Scoglio di La Pietra visto dalla strada costiera Bagnoli-Pozzuoli. Si notano i due tufi in discordanza.

Fig. 2. — Pozzuoli - Parete di tufo giallo sottostante alla località « Terra ».

Pozzuoli - Gerolomini. Cava « Regia ». Parete trachitica.

Fig. 1. — Le due cupole laviche di Villa Cariati e di Rione Campagnola viste dal mare. Si nota il grande taglio per l'apertura della Cava Regia e la parete trachitica dietro le Terme Puteolane ai Gerolomini.

Fig. 2. — Parete di trachite dietro le Terme Puteolane. Si notano le due colate trachitiche del Monte Olibano con le scorie interposte.

Fig. 1. — Tufo giallo. A destra gruppo di piccole pomici. Al centro pomici con vacuoli riempiti di una sostanza gialla. A sinistra frammento di fenocristallo di sanidino. (Nicol =; Ingrandimento: × 40).

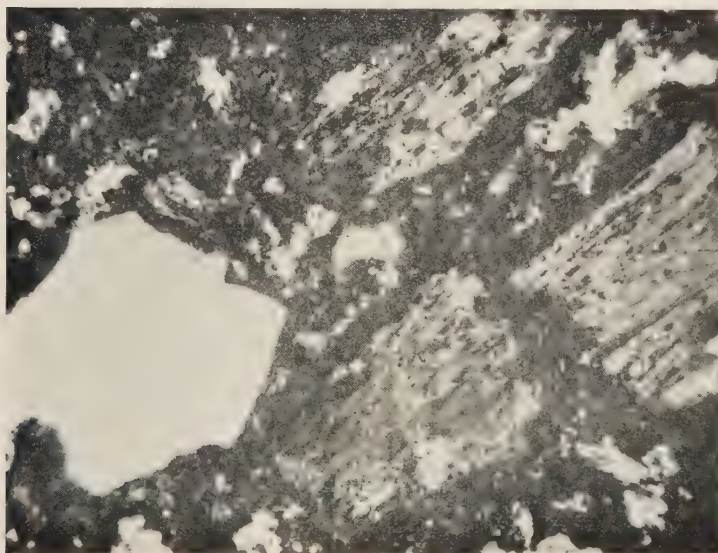



Fig. 2. — Tufo giallo della parete sottostante alla località « Terra » (Pozzuoli). Pomici con frammento di fenocristallo di sanidino. (Nicol =; Ingrandimento: × 40).

Fig. 1. — Tufo giallo pisolitico. Il centro della pisolite è chiaro in contrasto con i bordi oscuri. (Nicol =; Ingrandimento: × 40).

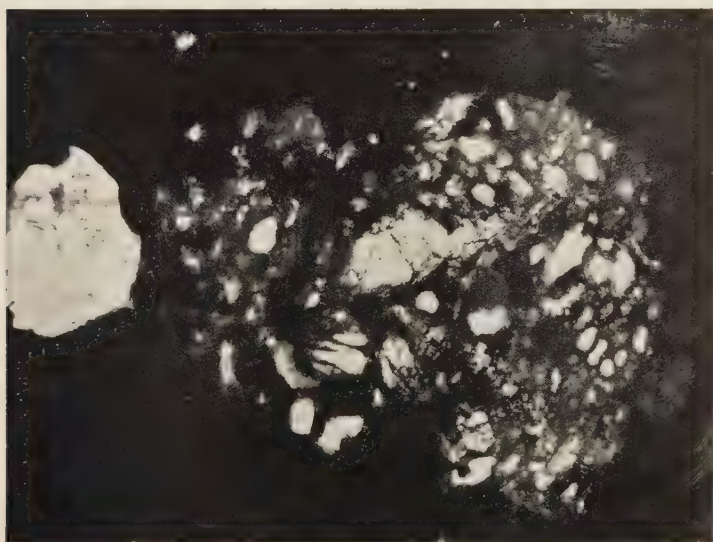



Fig. 2. — Tufo verde intercalato al tufo giallo stratificato (La Pietra). Piccola scoria nelle cui cellette si è deposta la glauconite. A sinistra fenocristallo di sanidino. (Nicol =; Ingrandimento: × 40).

SU UNA RAPPRESENTAZIONE DELLE g^1_n DI UNA RETTA

Nota del prof. **Rodolfo Permutti**, *presentata dal socio corr.* **A. Franchetta**

(Adunanza del dì 5 novembre 1955)

Sunto. – Dalla possibilità di rappresentare le g^1_n di una retta, riguardate come corrispondenze simmetriche di indice $n-1$, mediante una curva di un piano, immagine delle coppie non ordinate di punti della retta stessa, si deduce un' estensione del teorema di PONCELET per le coniche e si dà una nuova dimostrazione del teorema di LÜROTH.

1. — Un modello della superficie delle coppie non ordinate di punti di una retta è fornito da un piano α in cui sia fissata una conica non degenere Γ, quando s' immagini di riferire birazionalmente Γ alla retta data e di assumere come immagine di una coppia di punti P_1, P_2 di Γ il polo della retta $P_1 P_2$ rispetto a Γ. Ogni curva algebrica di α è allora immagine di una corrispondenza algebrica simmetrica della retta.

Se è data sulla retta una serie algebrica semplicemente infinita γ di gruppi di punti, si può considerare la corrispondenza che associa ad ogni punto P della retta i residui, rispetto ad esso, dei gruppi di γ contenenti P. Diremo, per brevità, che la curva immagine di detta corrispondenza « rappresenta » la serie γ.

Si supponga assegnata una corrispondenza simmetrica T_{n-1} d' indice $n-1$ e che esista un gruppo di punti distinti $G_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$ tale che ogni punto P_i $(i=1, \ldots, n)$ abbia come corrispondente in T_{n-1} il gruppo $G_n - P_i$; esprimeremo questa circostanza dicendo che G_n è un gruppo « involutorio » della T_{n-1}. Detta Δ la curva immagine della T_{n-1}, accade allora che gli $\binom{n}{2}$ punti ottenuti intersecando fra loro, a due a due, le tangenti $t_1, \ldots, t_n$ a Γ nei punti $P_1, \ldots, P_n$ appartengono a Δ. Inversamente, ogni curva d' ordine $n-1$ passante per quel gruppo di punti, che indicheremo brevemente con Q, è immagine di una corrispondenza d' indice $n-1$ per cui G_n è un gruppo involutorio.

Dimostriamo che le curve d' ordine $n-1$ passanti per Q costituiscono un sistema lineare Σ_{n-1} di dimensione

$$\delta_{n-1} = n-1.$$

Infatti, si ha:

$$\delta_{n-1} = \frac{1}{2}(n-1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n-1) + \varepsilon = n - 1 + \varepsilon,$$

con $\varepsilon \geq 0$. Per provare che $\varepsilon = 0$, procediamo per induzione rispetto ad n. Osserviamo, in primo luogo, che ovviamente $\varepsilon = 0$ per $n = 2$. D'altra parte, se s'impone alle curve di Σ_{n-1} di contenere un punto X di t_1, distinto dai punti d'intersezione di t_1 con $t_2, \ldots, t_n$, si ottiene un sistema di dimensione $n - 2 + \varepsilon$ che risulta costituito dalla componente fissa t_1 e dal sistema Σ'_{n-2} delle curve d'ordine $n-2$ passanti per gli $\binom{n-1}{2}$ punti d'intersezione delle rette $t_2, \ldots, t_n$ a due a due. Ne segue, per l'ipotesi dell'induzione, che Σ'_{n-2} ha dimensione $n-2$ e quindi $\varepsilon = 0$.

Al sistema Σ_{n-1} appartengono le curve immagini, nel senso precisato al principio, delle g^1_n contenenti il gruppo G_n. Ma la totalità di queste g^1_n ha dimensione $n-1$ ed è chiaro che due g^1_n distinte sono rappresentate da curve distinte. Si conclude pertanto che:

Ogni curva d'ordine $n-1$ passante per il gruppo Q rappresenta una g^1_n contenente G_n.

2. — Rileviamo alcune conseguenze del risultato precedente.

a) *Le curve del sistema Σ_{n-1} sono irriducibili oppure spezzate in un gruppo di tangenti a Γ e in una curva irriducibile.*

E' ben noto infatti che una curva, immagine, nel senso precedente, di una g^1_n senza punti fissi, è irriducibile; mentre, se la g^1_n possiede i punti fissi $X_1, \ldots, X_\nu$, è costituita dalle tangenti alla conica in questi punti e da una curva irriducibile, immagine della $g^1_{n-\nu}$, priva di punti fissi, residua.

b) Consideriamo una curva irriducibile Δ, d'ordine $n-1$, passante per Q. Essa è immagine di una corrispondenza T_{n-1} dedotta da una g^1_n associando ad ogni punto gli $n-1$ punti che insieme ad esso costituiscono un gruppo della g^1_n. Ogni gruppe G'_n della g^1_n è involutorio per T_{n-1}; pertanto Δ contiene gli $\binom{n}{2}$ punti d'intersezione a due a due delle tangenti a Γ nei punti di G'_n. Si ha dunque il seguente teorema che costituisce una generalizzazione, che non mi risulta sia già stata osservata, di un ben noto teorema di Poncelet sulle coniche:

Se in una curva irriducibile Δ d' ordine n — 1 *è iscritto un* n - *latero circoscritto ad una conica* Γ, *esistono infiniti* n - *lateri circoscritti a* Γ *ed iscritti in* Δ.

c) Il risultato del n. 1 fornisce anche una semplice dimostrazione del teorema di Lüroth secondo il quale *una serie algebrica* ∞^1 *di gruppi di punti di una retta che sia d' indice uno, è costituita da un eventuale gruppo di punti fissi e dai gruppi di una serie lineare senza punti fissi contati tutti uno stesso numero di volte.*

Sia infatti γ una serie algebrica semplicemente infinita di gruppi di punti, d' indice uno e $\bar{\gamma}$ la serie costituita dai gruppi di γ, privati degli eventuali punti fissi. Basterà dimostrare che $\bar{\gamma}$ è una serie lineare oppure è costituita dai gruppi di una serie lineare contati uno stesso numero di volte.

Supponiamo, in primo luogo, che il generico gruppo G_n di $\bar{\gamma}$ consti di punti tutti distinti. La corrispondenza $\bar{T}_{n-1}$ che si ottiene da $\bar{\gamma}$ associando ad ogni punto P il gruppo residuo, rispetto a P, del gruppo di $\bar{\gamma}$ che lo contiene, ha $\bar{G}_n$ come gruppo involutorio e tanto basta, in base al teorema del n. 1, per poter asserire che $\bar{\gamma}$ è una g^1_n.

Nel caso in cui il generico gruppo $\bar{G}_n$ della $\bar{\gamma}$ abbia dei punti multipli, sicchè esso sia costituito soltanto da $\mu < n$ punti distinti, consideriamo la serie che ha come gruppo generico i punti di $\bar{G}_n$, presi semplicemente. Per quanto si è detto poc' anzi, essa è una g^1_μ. Indichiamo con $T_{\mu-1}$ la corrispondenza associata alla g^1_μ. La T_{n-1} si può considerare allora come somma della $T_{\mu-1}$ e di un certo numero di corrispondenze d' indice non superiore a $\mu - 1$. Le curve immagini di queste corrispondenze hanno infiniti punti in comune con la curva immagine della $T_{\mu-1}$ che è irriducibile, e pertanto coincidono con essa.

Sul rinvenimento di un frammento mandibolare umano in Grotta Romanelli presso Castro (Lecce)

Nota del Dr. **Antonio Lazzari**, *presentata dal socio* **Geremia D'Erasmo**

(Adunanza del dì 4 giugno 1955)

Sunto. — Viene descritto un frammento di mandibola umana rinvenuta dall' A. nel più basso dei livelli a terra bruna di Grotta Romanelli, in provincia di Lecce, già nota per la ricca fauna di vertebrati fossili e per l'industria umana paleolitica illustrata da vari AA. e sopratutto da G. A. Blanc.

In occasione di una delle visite che sempre effettuo a Grotta Romanelli quando mi si presenta l' opportunità di recarmi a Castro, luogo natìo (nella quale ho avuto modo di osservare che qua e là il fronte del deposito mostra evidenti segni di scavi condotti irregolarmente [1]) e quindi non attribuibili all' Istituto Italiano di Paleontogia Umana, che si occupa metodicamente di quella stazione paleolitica) ho volto la mia attenzione alla raccolta di piccole ossa e di piccoli manufatti litici, sparsi nell'area pianeggiante per riporto di materiale di scavo — corrispondente ad un solco di erosione del suolo della cavità. Tali materiali si trovano così dispersi dalla giacitura originaria per effetto delle ondate riversatesi nella grotta in occasione della eccezionale tempesta del 13 dicembre 1954, che mise allo scoperto anche il livello a pomici di cui ho dato notizia con una mia comunicazione fatta alla Società dei Naturalisti in Napoli [2]).

Nell' effettuare la mia piccola raccolta ebbi anche la fortuna di rinvenire un molare umano, che già nella caratteristica patina giallo-rossastra, e nell' aspetto generale offre evidenti e sicuri segni della sua provenienza dal deposito paleolitico. Spinto dall' interesse procedetti ad una accurata

---

[1]) Risulta che durante la stagione estiva, ed oramai da qualche anno, giovani villeggianti che si recano a Castro Marina visitano frequentemente la grotta e vi effettuano scavi, condotti senza nessun metodo, allo scopo di raccogliere materiale osteologico e manufatti litici per " ricordo ". L' Istituto Italiano di Paleontologia Umana, conscio del pericolo che importa una tale pratica, ha provveduto a nominare un custode della grotta nella persona del Sig. Gino Stasi; ma è evidente la scarsa efficacia della iniziativa se si tiene presente che il custode risiede a Spongano e la grotta si trova a Castro, a 6 Km. di distanza.

[2]) Lazzari A., *Segnalazione di un livello di pomici in Grotta Romanelli, presso Castro (prov. di Lecce)* Boll. Soc. Natur. in Napoli, vol. LXIV. Napoli, 1955.

ricerca di altri reperti del genere; e successivamente, rivolta la mia attenzione al materiale in posto, ebbi modo di vedere sulla superficie di uno scavo recente praticato nella terra bruna (sulla sinistra di chi guarda dal mare) un grosso frammento mandibolare sinistro umano, provvisto di due molari, con caratteristiche di fossilizzazione tali da farle senz'altro ascrivere al deposito di Grotta Romanelli.

Tale rinvenimento, pur con tutte le riserve per la sua età ed appartenenza a specie umana coeva del deposito, è da ritenersi insolito, se non addirittura eccezionale, data la grande rarità di resti umani in quella grotta. Difatti, per quanto mi risulta dalla bibliografia, solo nel corso degli scavi effettuati da P. E. Stasi (scopritore della stazione, primo illustratore ed assertore della sua importanza e della sua appartenenza al Paleolitico, pur contro l' opposta opinione di Pigorini) furono rinvenuti resti umani ed anche in quantità discreta, fra cui un cranio completo, di maschio adulto, che fu oggetto di indagini dettagliate da parte di Zuccarelli [1]). Questi concluse il suo studio osservando che: « Pur non potendo ritenersi un cranio della più remota antichità e nemmeno forse di una razza umana assai remota, è però certamente da riferirsi ad un' epoca preistorica, lontana da noi alcune diecine di migliaia di anni ».

Successivamente, anche Giuffrida-Ruggeri [2]) ebbe ad occuparsi di quel cranio, esprimendosi negativamente circa la notevole antichità e concludendo che «piuttosto che alle epoche antichissime il cranio di Romanelli ci fa pensare agli Japigio Messapi, dei quali è stato detto che avevano il tipo fisico dei Veneti ecc ».

Ho voluto accennare a questi precedenti, sia perchè privo di altre notizie circa eventuali più recenti rinvenimenti di reperti umani [3]), ed anche in considerazione del fatto che il grosso frammento di mandibola da me trovato non sembra, effettivamente, offrire caratteristiche morfologiche di spiccata primitività, oltre a ciò, è da tenere presente che la porzione del giacimento ove ho raccolto il frammento mandibolare mostra evidenti i segni di antico rimaneggiamento, quasi fosse stato praticato uno scavo per sotterrarvi qualche cosa, colmando poi la cavità con il materiale

---

[1]) Zuccarelli A., *Il teschio preistorico della "Grotta Romanelli" nella scala dei teschi dell' umanità remota.* Ann. di Nevrol., anno XXVIII, fasc. VI Napoli 1910.

[1]) Giuffrida-Ruggeri V., *Quattro crani preistorici dell' Italia meridionale (Romanelli, Vitigliano, Arpino e Fucino) e l'origine dei mediterranei.* Arch. per l' Antrapol. e la Etnologia, vol. XLV. Firenze, 1916.

[2]) Non è escluso che nelle varie campagne di scavo condotte dal barone G. A. Blanc dapprima, e successivamente dal di lui figliuolo A. C. Blanc, sia stato ritrovato qualche altro reperto umano; non risulta, però, pubblicata alcuna notizia in proposito.

di risulta rappresentato da ossa e terra bruna. Di conseguenza, in questa parte del deposito paleolitico non si osserva, in sezione, la caratteristica stratificazione, altrove sempre ben netta, del materiale di riempimento della grotta.

Non è mio compito occuparmi qui di questa situazione, che probabilmente sarà stata anche notata dagli studiosi dell' Istituto Italiano di Paleontologia Umana. Difatti, ho avuto modo di constatare che un pò più in basso, e più a destra del punto nel quale ho rinvenuto il frammento mandibolare, risultano messe in evidenza le sezioni di due buche praticate nel deposito di terra bruna, successivamente riempite da terra di colore più scuro e di grana uniforme, come se fosse stata passata ad un setaccio, e senza quel detrito calcareo che è, invece, sempre presente nella terra bruna in giacitura originaria.

Tali sezioni, secondo notizie raccolte sul posto, sarebbero apparse durante uno scavo effettuato nel 1954 da A. C. Blanc.

Il frammento mandibolare da me rinvenuto risulta interessato da rotture a superficie fresca tanto alla estremità distale, quanto a quella prossimale. Ciò dimostra, evidentemente, che la suddetta zona del deposito deve essere stata oggetto di qualche ricerca affrettata, condotta allo scopo di raccolta di ricordi della grotta. Del resto, all'epoca della mia visita (27 marzo 1955), in più punti di quel giacimento risultavano assai diffusi i segni di assaggi di ogni genere condotti un po' dappertutto.

L'avanzo di mandibola consta di buona parte del corpo e del ramo sinistro, risultando limitato anteriormente da una frattura che interessa l'alveolo del 2° incisivo sinistro, che è quindi incompleto; manca altresì tutta la protuberanza mentale. Posteriormente, il ramo mandibolare è rappresentato soltanto dall'apofisi coronoide, mentre il processo condiloideo è andato perduto, perchè distaccato da una frattura verticale, che, dal fondo della incisura sigmoidea, raggiunge la tuberosità pterigoidea. Tutte queste fratture sono di data recente e mostrano che l'osso è bianco e poco friabile nello spessore del suo tavolato. L'intero frammento ha tinta bruno scuro, come quella della roccia che lo racchiudeva, e tale colorazione si estende anche alle lamelle dell'osso spugnoso, visibile attraverso le fratture anteriore e posteriore. Sono conservati soltanto il 1° ed il 2° molare, ancora saldamente fissati nei rispettivi alveoli ed in ottimo stato di conservazione, come lo è del resto anche tutta la porzione ossea. Sono presenti e normalmente sviluppati gli alveoli del canino, dei due premascellari e del 3° molare, nonchè la parete posteriore dell'alveolo per il 2° incisivo, e, sia questi alveoli che quelli dei due molari conservatisi, sono integri fino al piano alveolare. Tuttavia gli alveoli del canino e del 1° premolare hanno il margine vestibolare più basso, condizione questa che si può supporre già tale nel vivente. Tutte le cavità alveolari, per la loro conformazione mostrano che accoglievano denti normali, e, in particolare anche

l'alveolo del 3° molare, completamente sviluppato, disponendo di tutto lo spazio necessario all'indietro. Infatti tra il margine posteriore di questo alveolo e il margine anteriore del ramo montante vi è uno spazio, occupato da una fossetta poco profonda, di forma triangolare, di circa 4 mm di altezza e di 6 mm di base. Il vertice posteriore di questo triangolo si continua con la linea obliqua interna.

La superficie esterna del corpo e del ramo della mandibola si presenta integra, con solo qualche incrinatura non profonda, interessante soltanto lo strato superficiale. All'altezza dell'alveolo del 1° molare e 15 mm al disotto del suo margine, è presente il forame mentale, perfettamente conservato. Esso è elissoidale e il suo asse maggiore, disposto orizzontalmente misura 4 mm, mentre l'asse minore è lungo 2 mm. La linea obliqua esterna si continua con il margine anteriore del processo coronoide, e, a metà della sua lunghezza è leggermente deteriorato. L'angolo formato tra questo margine ed il piano alveolare è di circa 100°. Questo angolo, le dimensioni del frammento, la presenza del 3° molare perfettamente sviluppato, l'usura dei denti, mostrano che si tratta di una mandibola già appartenente a un individuo adulto.

La frattura che limita anteriormente il frammento fossile, si estende all'indietro lungo il margine inferiore del corpo mandibolare di 25 mm, per cui manca completamente la fossetta digastrica; il margine poi è integro posteriormente, fino alla tuberosità pterigoidea. Manca l'angolo della mandibola. Il tubercolo pterigoideo è ben evidente e sporge di un paio di mm rispetto al margine inferiore della mandibola.

La faccia interna del frammento è anche integra e mostra ben conservato l'orificio superiore del canale dentale, con la lingula (spina di Spix), nonchè il solco milo-joideo. Il canale dentale, dato che la frattura posteriore del fossile è avvenuta in quel punto subito a ridosso, è visibile, perchè aperto posteriormente, per una lunghezza di circa 6-7 mm. Sono altresì evidenti la linea obliqua interna e la fossetta sottomascellare.

Dimensioni:

Lunghezza massima lungo il margine inferiore	mm 56
Lunghezza massima misurata sul piano alveolare	mm 74
Altezza tra l'apice del processo coronoideo ed il tubercolo pterigoideo	mm 63,5
Altezza del processo coronoideo dal piano alveolare all'apice	mm 42,5
Spessore del corpo misurato all'altezza del 3° molare	mm 26
Spessore del corpo misurato nella porzione goniale	mm 6,5
Distanza tra il margine anteriore dell'alveolo del 1° premolare ed il margine posteriore del 3° molare	mm 43
Dimensioni, misurate sul piano alveolare, dell'alveolo per:	
l'incisivo	mm 6×14
il 1° premolare	mm 5×7

il 2° premolare	mm 5×7
il 3° molare	mm 7×7

Denti. — Come si è detto, sono conservati il 1° ed il 2° molare, e questi denti presentano sensibile usura, che interessa sopratutto le cuspidi, in modo che la superficie triturante è alquanto spianata, e il piano di tale superficie è leggermente obliquo verso l'esterno, formando un piccolo angolo con il piano alveolare del lato vestibolare. Lo smalto presenta varie incrinature nel senso verticale, ma è molto ben conservato e i denti hanno grande solidità. Sulla corona si notano tracce dell'orletto gengivale, costituito da una sottile riga di incrostazione discontinua, che cinge la corona sulle facce vestibolare e labiale, parallelamente al margine alveolare, e a 3 mm di distanza da questo.

La corona del 1° dente è abbastanza usurata, in modo che le cuspidi mostrano al loro centro dei fori, dovuti alla cavità della polpa, venute allo scoperto. Dei tre cuspidi vestibolari, il più consumato è quello anteriore, che presenta anche il foro più grande, mentre dei due della fila labiale è maggiormente consumato il posteriore.

Il secondo molare è meno usurato e, come per il primo molare, l'usura è maggiore al centro che al margine della superficie masticatoria. Esso è provvisto regolarmente di 4 cuspidi. A giudicare dall'andamento delle superfici di usura, il combaciamento con i denti dell'arcata superiore doveva essere normale, e cioè, il terzo anteriore del 1° molare si opponeva alla metà posteriore del 2° premolare superiore, mentre gli altri due terzi si opponevano ai due terzi anteriori del 1° molare superiore; il terzo posteriore di questo, insieme con i due terzi anteriori del 2° molare superiore si opponevano al 2° molare inferiore.

Dimensioni:

Lunghezza massima del 1° molare	mm 11
Larghezza massima » »	mm 11
Lunghezza massima del 2° molare	mm 10,5
Larghezza massima » »	mm 11

Napoli, Istituto geologico dell'Università, giugno 1955.

1

Fig. 1. — Frammento di mandibola umana di Grotta Romanelli, visto dalla faccia interna.

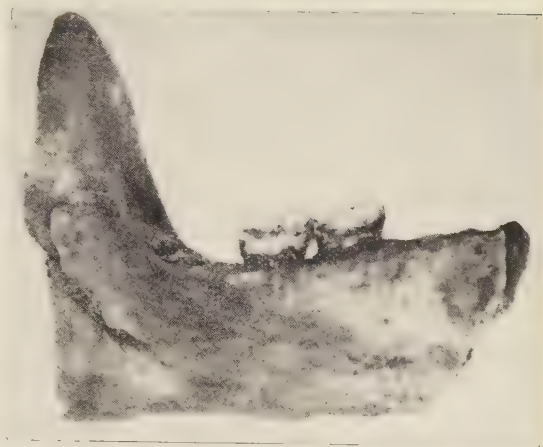
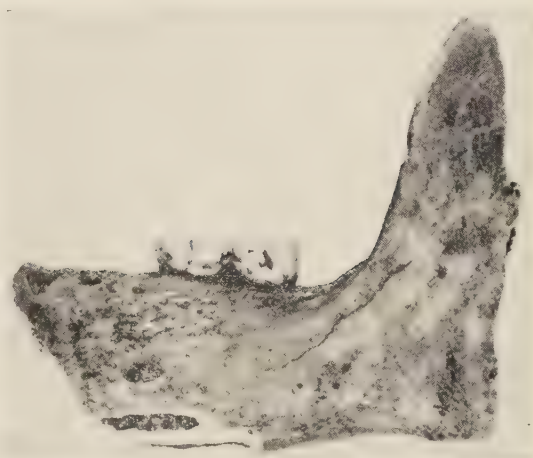



Fig. 3. — Lo stesso frammento, visto dalla faccia triturante.

3

2

Fig. 2. — Lo stesso frammento, visto dalla faccia esterna.

[Le figure sono leggermente rimpicciolite].

Petrografia chimica dei tufi flegrei
II) tufo giallo, mappamonte, pozzolana.

Nota del socio **Antonio Scherillo**

(Adunanza del dì 4 giugno 1955)

Sunto. — In base alla stratigrafia della zona urbana ed extraurbana di Napoli, si attribuisce al « secondo periodo flegreo » la potente formazione di pozzolane della zona Miano - Ponti Rossi - Capodichino - Poggioreale - Pesole d' Arpino. In alcune cave della zona si è potuto osservare il passaggio pozzolana → mappamonte → tufo giallo, che viene descritto e attribuito a un fenomeno di autometamorfismo. Se ne conclude che queste pozzolane sono l' equivalente non metamorfosato del tufo giallo napoletano. Il lavoro è corredato da 21 analisi chimiche dell' A.

Il presente lavoro segue quello introduttivo [1]) sul tufo giallo napoletano dopo un intervallo di quasi cinque anni. Durante questo lungo periodo ho però continuato ad occuparmi dei prodotti dei Campi Flegrei, perchè ho partecipato per conto della Commissione Geologica d' Italia al rilevamento *ex novo* del foglio « Napoli » della carta geologica d' Italia, e quindi ho dovuto seguire fra l' altro in tutta la sua estensione il tufo giallo.

Inoltre, fra le conclusioni del lavoro di rilevamento, ho potuto dare uno schema della successione stratigrafica per i prodotti flegrei nella zona urbana ed extraurbana di Napoli. Tale stratigrafia costituisce appunto una delle parti fondamentali del presente lavoro, perchè è in base a questa che ho potuto accertare che la potente formazione di pozzolane, la quale compare a nord della strada Capodimonte-Marano e ad est del Parco di Capodimonte, è l' equivalente del tufo giallo napoletano. Ciò è confermato, come vedremo, non solo dalla posizione stratigrafica delle pozzolane, ma anche dal fatto che in alcune cave noi possiamo constatare il graduale passaggio pozzolana - mappamonte - tufo giallo.

A questo avevo già accennato in uno dei miei precedenti lavori [2]), ma, per l' importanza dell' argomento e perchè nel frattempo ho potuto continuare le ricerche, sia sul terreno che in laboratorio, mi è sembrato op-

---

[1]) Scherillo A. *Petrografia chimica dei tufi flegrei*: 1) *Il tufo giallo.* Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat., serie 4ª, vol. XVII, pag. 343-356. Napoli, 1950.

[2]) Scherillo A. *Sulla revisione del foglio « Napoli » della carta geologica d'Italia.* Boll. Servizio Geol. d'Italia, vol. LXXV, pag. 808-826. Roma, 1953.

portuno riferire particolareggiatamente in questo lavoro i risultati dei miei studi [3]).

§ 1) *La straiigrafia a Capodimonte e a Pésole d' Arpino.*

Se prendiamo come base le formazioni del terzo periodo, che si osservano al Vomero-Arenella, vediamo che tendono a ridursi progressivamente a misura che si procede verso nord e verso est, cioè ci si allontana dai centri eruttivi (Agnano, Solfatara, Cigliano, Astroni). Ciò significa che, non solo la potenza complessiva diminuisce, ma che non potremo trovare nessun nuovo termine, salvo che si tratti di materiali rimaneggiati.

La riduzione però non è uguale per tutti i termini. P. e. le « pomici principali » sono singolarmente costanti e si modificano lentamente anche nei particolari, cosicchè rappresentano un eccellente termine di riferimento· Abbastanza costante è la formazione E terzo periodo intermedio), che è sempre ben riconoscinile per la sua tinta avana con fasce violacee intercalate. Della formazione F (Astroni, i termini più costanti sono le pomici.

E' ovvio che una volta riconosciute le formazioni del terzo periodo, viene anche stabilito il significato stratigrafico delle sottostanti. Perciò nelle descrizioni che seguono non solo dò grande importanza al « terzo periodo » ma comincio da questo come dal gruppo di formazioni più sicure.

Procedendo dunque dal Vomero - Arenella verse est troviamo, nel Parco di Capodimonte, che la stratigrafia corrisponde perfettamente per il « terzo periodo » al modello tipico, pur avendosi qui una generale diminuzione della potenza dei singoli termini e, addirittura, la scomparsa di alcuni di questi.

Riporto la stratigrafia che si osserva nel margine settentrionale del parco nel vallone sotto il così detto Eremo, di fronte a Miano - Mianella. Come ho detto, questa volta procedo dall' alto verso il basso.

Sotto il terreno vegetale attuale, frammisto di pomici caotiche, si ha, per una potenza complessiva di cm. 70, una fascia di pomici e, sotto, di pozzolane e pomici interstratificate. Questa corrisponde alle « pomici A e B » con le pozzolane connesse e alle « pozzolane e pomici interstratificate» del Vomero - Arenella. Seguono per circa 30 cm. tre straterelli di pozzolane rispettivamente grigie, grigie giallastre, giallastre, separate tra loro e dalla formazione soprastante da straterelli di humus. Corrispondono alle « pozzolane grigie », « p. gialline , « p. variegate » del V. A. La serie è chiusa da uno straterello di cenere violacea che si trova pure al V. A.

[3]) È opportuno che ripeta qui — con qualche leggera modifica (che mi auguro sia un perfezionamento) — la serie stratigrafica che ho assunto come tipica per la zona urbana e suburbana di Napoli, cioè quella del Vomero-Arenella. La serie però non è completa, perchè in nessun punto sono state messe in vista le formazioni più antiche, cioè quelle del *primo periodo flegreo* e le più antiche del *secondo periodo* (tufi gialli stratificati del Rione Amedeo e del Parco Grifeo).

Sotto questi prodotti, appartenenti alla formazione F (Astroni) si trovano, anche nel Parco di Capodimonte, le « pozzolane avana in parte humificate », (formazione E), con una potenza di circa m. 2. Interposta a queste pozzolane si trova una fascia di lapillo violaceo.

La successione che si osserva al Vomero-Arenella è la seguente (fig. 1):

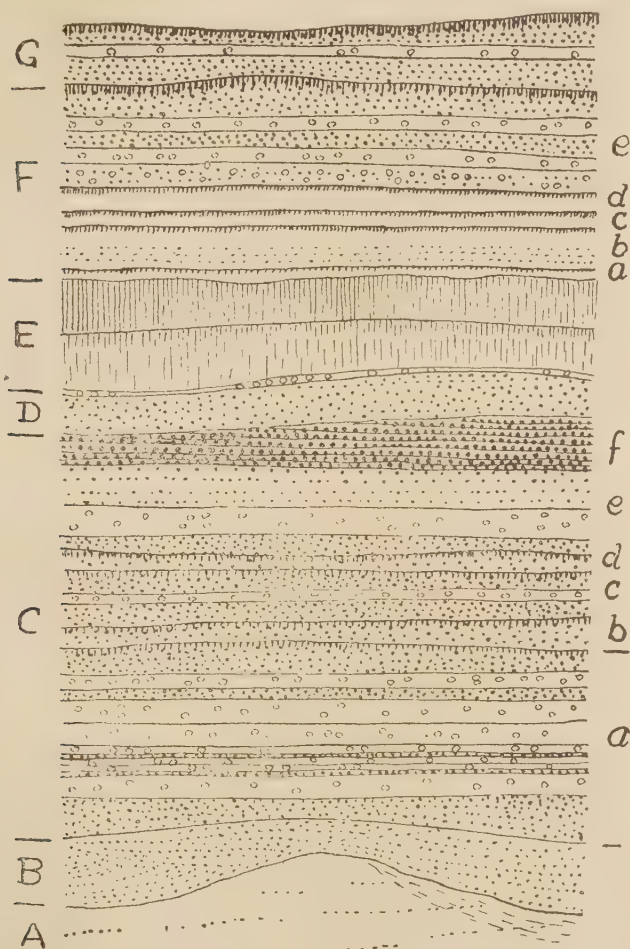



Fig. 1. — Stratigrafia schematica del Vomero-Arenella. Per la spiegazione delle lettere si rimanda al testo. Sul tufo giallo, a destra, è rappresentato un lembo di mappamonte.

A] *Secondo periodo* (recente).

Tufo giallo napoletano, talora con mappamonte.

B] *Periodo di transizione.*

La formazione E copre direttamente le « pomici principali », che sono parzialmente erose. Tali pomici hanno una potenza complessiva di m 1,70 circa e sono costituite — dall' alto verso il basso — da tre strati di pomici di circa cm 30 di spessore ciascuno, da tre minori, con uno spessore ciascuno di cm 10-15 e da un ultimo di cm 30. Questi strati di pomici sono delimitati da straterelli interposti di pozzolana.

Seguono cm 50 di pozzolana giallo-grigiastra, una fascia di humus avana di circa m. 1 e, sotto, una formazione di pozzolane grigie di cui non si può conoscere la potenza.

Questa formazione, per la sua posizione stratigrafica, può appartenere tanto al « periodo di transizione », quanto al « secondo periodo ». La medesima formazione si può però osservare con tutta evidenza sul fianco destro del Cavone di Miano, che appunto limita a nord il Parco di Capodimonte. Qui la potenza visibile è di circa m 20. Basterebbe già tale fatto — ma ci sono ben altre prove — per assegnare le pozzolane al secondo periodo, perchè i materiali del periodo di transizione hanno una potenza variabile e limitata e, in gran parte, formano lenti di precedenti prodotti rimaneggiati.

Un altro carattere che fa assegnare queste pozzolane al secondo periodo è la loro grande estensione; continuano infatti molto al di là di Capodimote, almeno fino a Casalnuovo a una decina di Km. più a est. Qui però lo studio stratigrafico è assai disagevole perchè deve esser limitato ai pozzi. Dove invece lo studio è facile per l' abbondanza delle sezioni facilmente accessibili è la zona Purgatorio - Pesole d' Arpino, cioè lungo il primo tratto della strada per Avellino a 5 Km. circa a est di Capodimonte.

Pozzolane, lapilli, pomici, sabbie rimaneggiate. La potenza è variabilissima perchè la formazione si adatta sulla superficie erosa del tufo giallo.

Terzo periodo antico.

C] Formazione da attribuirsi ad Agnano, suddivisa nei termini sotto indicati.

a) « Pomici principali »: alternanze di strati di pomici e pozzolane (potenza complessiva, m 3 circa; *b*) Pozzolane giallo grigiastre (m 0.30-0.50); *c*) Pozzolane giallo grigiastre con una fascia di pomici (« pomici intermedie ») (m. 0.50-1); *d*) Pozzolane giallo grigiastre (m 0.30-0.50); *e*) Pozzolane giallo grigiastre con una fascia di pomici (« seconde pomici »), poi pozzolane alternate a straterelli di pomici e lapilli (m 1-2); *f*) Pozzolane, pomici e lapilli (« lapillo nero ») in straterelli alternati m 1-2).

I termini tra *a* e *d* sono separati tra loro da straterelli di humus.

La formazione *c* può essere parzialmente rimaneggiata; caratteristica in questo caso è l'alternanza di straterelli di pozzolane grigio grigiastre e di sabbie grigie con stratificazione incrociata.

Il rimaneggiamento pare particolarmente frequente per i termini *b* e *d*.

D] Pozzolana marrone, poco distintamente stratificata, attribuibile alla Solfatara. Per lo più manca, forse perchè essendo humificata si confonde colle formazioni seguenti (potenza massima m 1).

Terzo periodo intermedio.

E] Pozzolane più o meno humificate con predominante colore avana e fasce vio-

Anche qui nella descrizione stratigrafica procedo dall' alto verso il basso (fig. 2).

La formazione più recente è costituita da ceneri grigiastre finemente stratificate di sicura origine vesuviana (m. 2). Segue una fascia di humus misto a pomici caotiche, e quindi si inizia il « terzo periodo recente ». Si

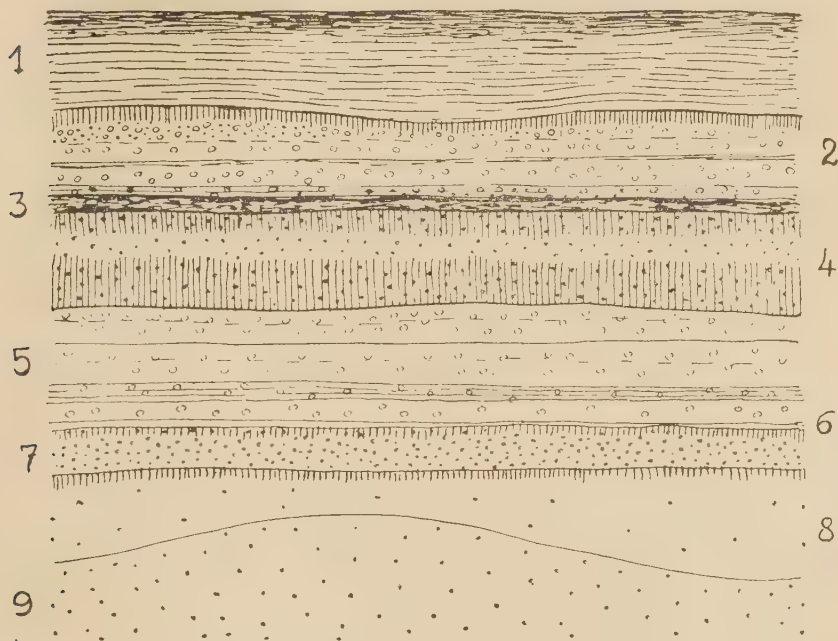



Fig. 2. — Stratigrafia delle cave di pozzolana a Pesole d'Arpino.
1) Terreno vegetale e ceneri vesuviane; 2) Pomici di Astroni; 3) Pozzolane e lapilli interstratificati; 4) Pozzolane avana in parte humificate; 5) « Pomici principali »; 6) Pozzolane grigio chiare; 7) Pozzolane marrone humificate; 8) Pozzolane del secondo periodo, superiori; 9) Pozzolane del secondo periodo, inferiori.

osservano cm 30 di pomici (« pomici B »), cm. 10 di pozzolane miste a pomici (« pozzolane intermedie »), poco distinte, pomici (« pomici A ») che passano a pozzolane e pomici interstratificate (in complesso cm 50).

Questi termini sono meglio conservati qui che a Capodimonte, forse perchè sono protetti dalla coltre delle ceneri vesuviane. Il terzo periodo

---

lacee. Non sono nettamente stratificate (m 2 circa). Spesso alla base presentano una fascia di pomici e lapilli grigi e un'altra intermedia.

Talora, specialmente in seguito a rimaneggiamento, contengono lenti e fasce di sabbie grigie, non stratificate.

Terzo periodo recente.

F] Ad esclusione del termine *a*, che è forse da attribuirsi a Cigliano, tutti gli altri sono da attribuirsi ad Astroni.

recente termina in basso con cm 20 di pozzolane e lapilli interstratificati (termini *b, c, d,* del Vomero-Arenella).

Seguono le « pozzolane avana in parte humificate » (E) con una fascia intermedia più chiara m (1,70).

La formazione C è essenzialmente rappresentata dalle « pomici principali ». Queste sono costituite da uno strato superiore di pomici (cm 50), in realtà costituito da due strati poco distinti di cm 20 e 30, dei quali il più superficiale è spesso parzialmente eroso. Viene poi lo strato maggiore di cm 80, che pure accenna a una suddivisione in due strati (di cm 40 ciascuno), poi un gruppo di tre straterelli di cm 5 ciascuno, e infine un ultimo strato di cm 20. Comprendendo i sottili strati di pozzolana, che delimitano gli strati di pomici, la potenza complessiva è di m 1,70.

Alla base della formazione C si hanno pochi cm di pozzolane grigio chiare. Si ha quindi uno strato di pozzolana marrone humificata (m 1) compresa tra due fasce di humus.

La stratificazione di queste formazioni è orizzontale.

Sotto le formazioni del terzo periodo si hanno le pozzolane grigie del secondo periodo, che qui sono costituite da due formazioni separate

---

a) « Pozzolana grigia »; cenere violacea e, sopra, una fascia di lapillo (cm 10-20).

b) « Pozzolane variegate ». Si tratta di pozzolane che, inferiormente, sono grigio marrone e gialline e, superiormente, grigiastre. Nella metà inferiore sono attraversate da 2 o 3 straterelli di lapillo (m 1).

c) « Pozzolane galline » (cm 20-30).

d) « Pozzolane grigie » con lapilli.

Tutti questi termini sono delimitati tra loro da straterelli di humus avana o violaceo.

e) « Pozzolane e pomici interstratificate », « Pomici A », « Pozzolane interposte », « Pomici B », « Pozzolane superiori » (m 1-1.50). Humus violaceo.

Sopra questo humus si trovano pozzolane giallo grigiastre con una fascia di pomici interposte (*e*) (m 1). Sono forse dovute ad un'ultima, tardiva eruzione di Astroni, mentre dovrebbero attribuirsi al Vesuvio i superiori straterelli di pozzolana alternata ad humus, che però ordinariamente si confondono con quello che era fino a pochi anni or sono il terreno agrario.

Su questo argomento vedi:

RITTMANN A., VIGHI L., FALINI F., VENTRIGLIA U., NICOTERA P. *Rilievo geologico dei Campi Flegrei.* « Boll. Soc. Geol. It. », vol. LXIX. Roma, 1950.

SCHERILLO A. *Sulla revisione del foglio « Napoli » della Carta Geologica d'Italia.* « Boll. Serv. Geol. d'Italia », vol. LXXV, pag. 808-826. Roma, 1954.

Relazione sul lavoro di revisione del foglio « Napoli » della Carta Geologica d'Italia compiuto nel 1954. Ibid., vol. LXXVI, pag. 581-587. Roma, 1955.

— *La stratigrafia della zona Vomero-Arenella (Napoli).* « Boll. Soc. Naturalisti in Napoli », vol. LXIII, pag. 102-112. Napoli, 1954.

— *Osservazioni stratigrafiche sul sottosuolo di via Roma (Napoli).* Ibid., vol. LXIII, pag. 121-122, 1954.

— *Nuove osservazioni sulla stratigrafia della città di Napoli (via Roma, via Pessina, via S. Teresa degli Scalzi).* Ibid., vol. LXIV, pag. 93-101, 1955.

da una discordanza talora abbastanza netta. La superiore è più chiara, e ha una potenza variabile da 1 a 3 metri, l' inferiore è assai più potente, ma non è mai messa in vista per tutto il suo spessore.

§ 2) *La stratigrafia lungo il Vallone dei Ponti Rossi.*

Mentre nelle località di cui si è parlato finora non si giunge a vedere la base delle pozzolane, nel vallone dei Ponti Rossi, non solo si vede questa, ma anche parte delle formazioni sottostanti.

Il vallone dei Ponti Rossi non è che la continuazione della cupa di Miano. Questa « cupa » dopo essersi diretta a est fino all' altezza della strada per Secondigliano, piega bruscamente a sud. E' questo il tratto che prende il nome dai Ponti Rossi.

In diversi punti, alla base delle pareti che fiancheggiano la valle, compare una breccia vulcanica con scorie rossastre e grandi frammenti di ossidiana neri, che superiormente passa a tufo caotico giallo rossastro ricco di pomici e scorie, con abbondanti cristallini nella massa. Questo tufo è identico al « tufo campano », che viene estratto come materiale da costruzione dal sottosuolo dei comuni della Terra di Lavoro a est e a nord est di Napoli (Casalnuovo, Grumo, Cardito ecc.) e deve essere quindi ascritto al « primo periodo flegreo ». E' noto del resto, che anche alla base della collina di Poggioreale, nel lato sud, compaiono in molti punti delle brecce vulcaniche, che sono appunto attribuite al primo periodo (e, a giudicare dalla grandezza degli elementi, devono appartenere a un centro eruttivo locale).

Sopra le formazioni del primo periodo, dopo un « tasso » di cui parlerò in seguito, vengono le pozzolane grigie, con una potenza di 20-40 metri, ricoperte a loro volta dai prodotti del terzo periodo. Resta così confermata l' attribuzione delle pozzolane al « secondo periodo ».

Il vallone dei Ponti Rossi presenta, quindi, nella geologia napoletana un grande interesse perchè è una delle poche località in cui si possono osservare contemporaneamente i prodotti dei tre periodi. L' interesse per di più è reso ancora maggiore perchè, come vedremo, qui si osserva, in modo da non lasciar dubbi, il passaggio dalla pozzolana del secondo periodo al tufo giallo.

Premetto che il passaggio pozzolana-mappamonte-tufo giallo si osserva anche altrove, per quanto non sia mai così evidente come ai Ponti Rossi. Infatti, lungo il versante settentrionale dei Camaldoli, e tanto più spesso quanto più ci si approssima al piede della collina, si possono notare sopra il tufo giallo lembi, sia pure isolati e di estensione limitata, di mappamonte e di pozzolana grigiastra. Nessuna discontinuità si osserva tra questi prodotti, anzi una sfuma gradualmente nell' altra. A nord della strada Capodimonte-Marano le pozzolane acquistano importanza preponderante,

ma le sezioni geologiche utili scarseggiano. Ad ogni modo un evidente esempio del passaggio pozzolana → mappamonte → tufo giallo si ha nella cava aperta nei pressi del ponte della strada S. Rocco-Piscinola in corrispondenza di villa Flauto e del bivio per Marianella. La cava consta di diversi pozzi aperti nel tufo giallo, che alla superficie è sostituito dal mappamonte e questo, a sua volta, dalla pozzolana grigia. La sostituzione, pur essendo graduale, è però molto rapida: a distanza di pochi decimetri si ha da una parte tufo giallo tipico, dall'altra tipico mappamonte e lo stesso avviene per il passaggio pozzolana → mappamonte.

Lo studio preciso delle formazioni di copertura è ostacolato dalla vegetazione e dalle frane; ad ogni modo vi si riconoscono chiaramente le « pomici pricipali » e le pozzolane avana humificate attraversate da una fascia di lapilli grigi.

Prima di iniziare la descrizione delle più significative sezioni della valle dei Ponti Rossi, premetto che questo solco è assai antico. Infatti, già le formazioni del primo periodo mostrano di esser state erose in corrispondenza di tale solco. La deposizione dei prodotti piroclastici del secondo periodo ha innalzato tutta la zona di almeno una quarantina di metri, ma, essendosi questi modellati sulla topografia precedente, il solco non è stato cancellato. Poi l' erosione è ripresa, alternata però a sedimentazione (sabbie). Attualmente il fondovalle attraversa di nuovo i prodotti del primo periodo. Il letto del fosso è costituito da sabbie rimaneggiate.

Le sezioni più interessanti sono quelle delle cave Improta. Si tratta di un complesso di diverse cave, alcune abbandonate altre tuttora in esercizio, che hanno praticato nelle pozzolane tagli grandiosi sul fianco sinistro del vallone dei Ponti Rossi, aprendo, tra l' altro, un ampio corridoio da ovest a est mettendo in comunicazione i Ponti Rossi con la calata Capodichino, all' altezza del manicomio provinciale.

Ne sono così risultate due pareti alte 40-50 metri costituite essenzialmente da pozzolana; una settentrionale (fig. 3) e una meridionale. Le cave ora in esercizio si trovano sulla parete sud, una dalla parte dei Ponti Rossi, l' altra della calata Capodichino. Il fronte di attacco di queste due cave si è notevolmente esteso verso sud. All' estremità della parete setsentrionale, verso i Ponti Rossi, vi è una cava di tufo giallo, ora inattiva.

Per chi proviene dai Ponti Rossi l' inizio della zona delle cave di pozzolana è segnato da una serie di « relitti » di materiale non scavato, allineati parallelamente all' andamento del vallone. La cava di tufo giallo è esterna a tale allineamento.

E' infine da ricordare che il piano di cava nel fronte verso la calata Capodichino e nel « corridoio » sopra ricordato è al livello della calata stessa, mentre quello nel fronte verso i Ponti Rossi è più basso di qualche metro, cioè al livello del vallone dei Ponti Rossi: un gradino separa appunto i due piani.

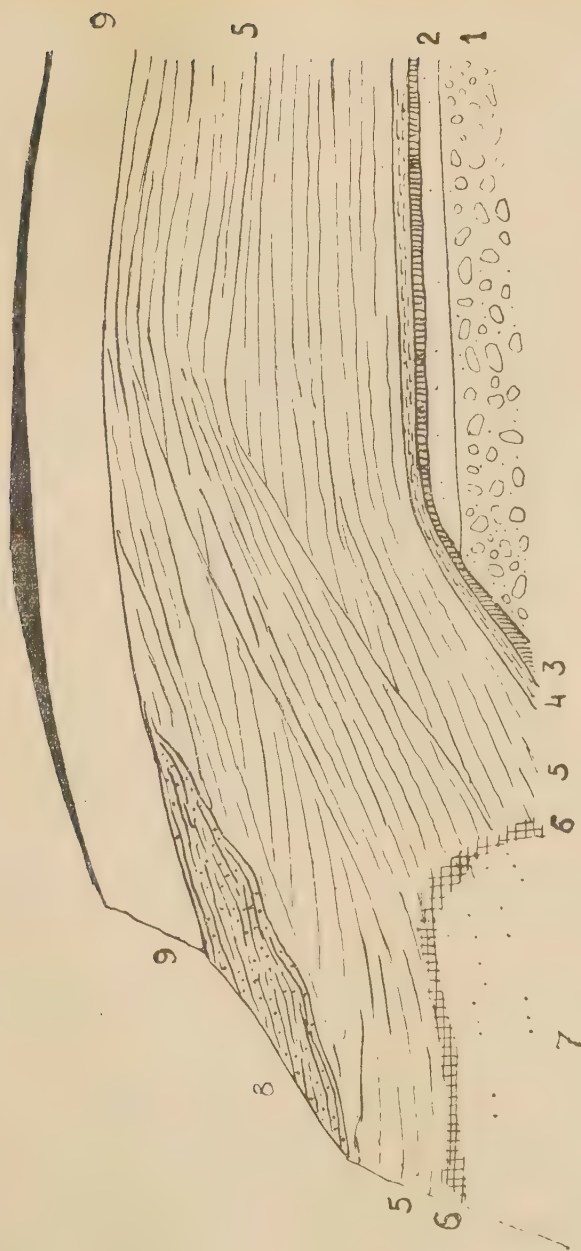



Fig. 3. — Ponti Rossi - Capodichino: sezione geologica della parete settentrionale.

1) Breccia vulcanica; 2) tufo campano; 3) sabbie e humus; 4) « tasso »; 5) pozzolane del secondo periodo; 6) mappamonte; 7) tufo giallo; 8) sabbie grigie con pozzolane rimaneggiate; 9) formazioni del terzo periodo. — Alcune discordanze, particolarmente accentuate, sembrano indicare che le pozzolane del II per. non costituiscono un termine unico.

In questa zona compaiono le fermazioni del primo periodo rappresentate da una breccia vulcanica con scorie rossastre e frammenti, talora di grandi dimensioni, di ossidiane (potenza visibile m. 2) e, superiormente, da un banco di tufo campano rossastro (m. 1) (fig. 4). Tali formazioni costituiscono il nucleo del gradino, che separa il piano di cava inferiore dal superiore. La stratificazione è pressocchè orizzontale, ma, come ho detto, la formazione è stata erosa in corrispondenza del solco dei Ponti Rossi e

Fig. 4. — Ponti Rossi. Cava Improta; affioramento delle formazioni del primo periodo. Dal basso in alto; breccia vulcanica, banco di tufo campano, sabbie e « tasso » (fot. B. De Nisco, giugno 1953).

poi ricoperta dalle pozzolane posteriori. I lavori di scavo hanno asportato la pozzolana e si sono arrestati quando hanno incontrato le formazioni del primo periodo, di nessun interesse tecnico.

Segue il « tasso » delle pozzolane del secondo periodo, che si è modellato sulla superficie della formazione precedente. Il tasso si trova immediatamente sotto il piano di cava superiore, e qui ha stratificazione orizzontale, poi si ripiega sulla superficie erosa dei prodotti del primo periodo, in corrispondenza del gradino e si immerge di circa 20°-30° verso ovest, scomparendo sotto il piano di cava inferiore. Si tratta di una serie di finissimi straterelli di pozzolana grigia chiara, assai regolari, con una potenza complessiva di circa m 1 e con un doppio straterello di lapilli e

pomici a 1/3 dell' altezza. Tra il tasso e il tufo campano è interposto un humus violaceo con lenti di sabbie.

Le pozzolane del secondo periodo, che si sovrappongono al « tasso », rappresentano nella zona la formazione più appariscente perchè sono visibili per tutta la loro notevole potenza (m 40, ma sono state parzialmente erose). La stratificazione, che risulta dall' allineamento delle pomici e dei lapilli inclusi, è quasi orizzontale, con una debolissima pendenza verso est; però, anche queste in corrispondenza del gradino si immergono verso ovest e la stratificazione, che in genere è molto regolare, diviene incrociata.

E' sul fronte verso i Ponti Rossi che si osserva (e qui con una straordinaria evidenza) il passaggio pozzolana → mappamonte → tufo giallo, che si compie entro uno spazio assai breve: 1 o 2 metri. La pozzolana è grigia, incoerente (per quanto, in massa, si comporti come un materiale abbastanza coerente), spesso pisolitica. Il mappamonte è grigio giallastro, semicoerente e ricco di piccole pisoliti. Il tufo è caratterizzato dal colore giallo paglierino e dalla compattezza. In prossimità del mappamonte vi si distinguono ancora delle pisoliti, più lontano queste non sono più distinguibili.

Il passaggio avviene lungo la linea dei « relitti »: questi infatti hanno il lato esterno, cioè quello verso i Ponti Rossi, formato da tufo giallo e l' interno da mappamonte e pozzolana. Qui ormai il tufo giallo è stato quasi completamente asportato, ne è però rimasto un lembo non trascurabile all' estremità della parete nord, dove si trova la cava, ora inattiva, che ho ricordato.

Per quanto il tufo giallo sfumi nel mappamonte e questo nella pozzolana, si può rappresentare il tufo, dato che il passaggio si compie in uno spazio assai ristretto, come se fosse limitato da una superficie. Tale superficie lungo i relitti è verticale, cioè inclinata di circa 60°-70° sulla stratificazione. Più in alto, come si vede nella cava di tufo, il limite tende a diventare parallelo alla stratificazione. Il tufo giallo rappresenta quindi il nucleo dei prodotti del secondo periodo.

Tra le pozzolane e le formazioni del terzo periodo si interpongono, sul lato dei Ponti Rossi, i resti di una grande lente di straterelli alternati di sabbie grigie e pozzolane (fig. 3, 8). Si tratta di depositi alluvionali, che indicano che l' attività del solco dei Ponti Rossi è ripresa, dopo la deposizione delle pozzolane del secondo periodo, con un' alternanza di alluvioni e di erosioni. Verso la calata Capodichino il limite superiore del secondo periodo è segnato da uno strato di humus. Comunque, anche qui le pozzolane mostrano tracce di erosione.

Le formazioni del terzo periodo lungo il « corridoio » formano una amplissima anticlinale. I prodotti caratteristici non si iniziano però subito, perchè sono preceduti da circa m 2,50 di pozzolane humificate intercalate a sabbie. E' la stessa formazione, che a Pèsole d' Arpino sta alla base del

terzo periodo. Seguono le « pomici principali » (m 1,70) colla caratteristica e regolarissima suddivisione in strati più potenti e più sottili di pomici, quindi, dopo una fascia di pozzolana, la « formazione E » colle pozzolane in parte humificate, avana, alternate a diverse fascie di sabbie e lapilli. La potenza è di solito 2 metri, ma aumenta verso i Ponti Rossi. Su questa si appoggiano i prodotti di Astroni (m 1), essenzialmente rappresentati dalle pomici, che sono ricoperti dal terrano agrario attuale costituito in gran parte da ceneri vesuviane rimaneggiate (fig. 5):

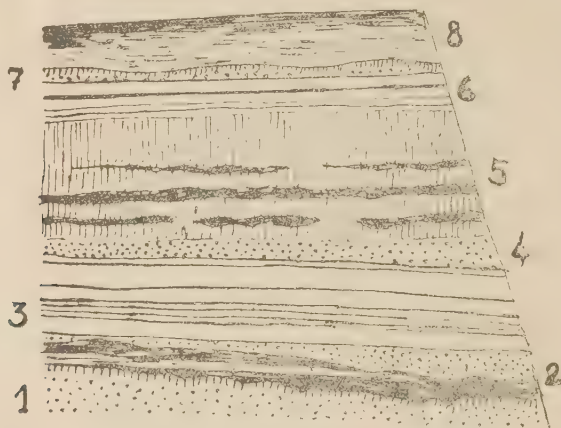



Fig. 5. — Cava Improta, parete meridionale verso i Ponti Rossi. Formazioni del terzo periodo.

1) Pozzolane del secondo periodo; 2) sabbie e pozzolane humificate; 3) « pomici principali »; 4) pozzolane; 5) pozzolane avana in parte humificate con tre fasce di sabbie; 6) pomici di Astroni; 7) humus; 8) ceneri vesuviane e terreno agrario attuale.

Di fronte alle cave Improta, sul lato destro del vallone dei Ponti Rossi, cioè ai piedi del Parco di Capodimonte, in corrispondenza del ponte Amendola, si trova una grande cava di pozzolana ora abbandonata.

Se questa cava non ha l'interesse delle precedenti, perchè manca il passaggio pozzolana → tufo giallo, è però degna di nota perchè mette in evidenza una considerevole massa di tipico tufo campano. Si è cavato tanto il tufo che la pozzolana, ma più questa che quello, quindi si ha un doppio fronte e un doppio piano di cava. Naturalmente, poichè il fronte del tufo campano verso i Ponti Rossi non è più l'originario, è inutile cercare, da questo lato, le tracce di un' eventuale antica erosione di tale tufo, che invece sono così evidenti alle cave Improta.

Il tufo campano ha in massa colore giallo rossastro e include pomici gialle e grigie, grandi scorie nere, nonchè blocchi di ossidiana. Attualmente il banco ha circa 4 m di potenza. Sotto il tufo, però senza un netto distacco, appare una breccia vulcanica a grandi elementi.

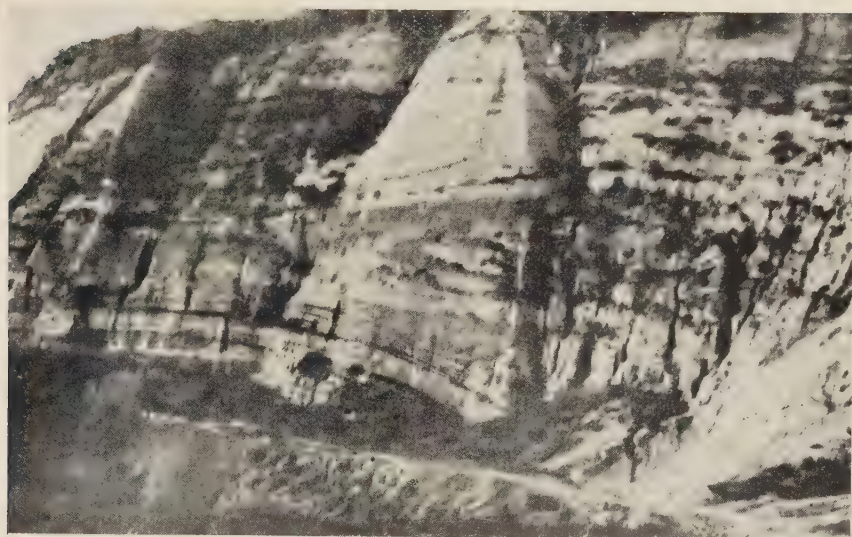



Fig. 1. — Ponti Rossi - Capodimonte: cava non più in esercizio di pozzolana del secondo periodo. In basso, in primo piano, affiora il tufo campano. Alla base della pozzolana è visibile il « tasso ». Nella pozzolana sono evidenti alcune discordanze più accentuate (fot. M. SCHERILLO, ottobre 1955).

Fig. 2. — Ponti Rossi - Capodimonte. Fronte della cava di tufo campano. Si nota la copertura col « tasso ». In secondo piano il fronte della cava di pozzolana del secondo periodo (fot. M. SCHERILLO, ottobre 1955).

Fig. 1. — Ponti Rossi - Capodimonte. Tufo campano passante a breccia.
(fot. M. SCHERILLO, ottobre 1955).

Fig. 2. — Ponti Rossi - Capodichino: parete settentrionale verso la Calata Capodichino. Pozzolana del secondo periodo (chiara), colla copertura del terzo periodo (strati grigi e chiari). Il piano di cava è costituito dal « tasso » (fot. M. SCHERILLO, ott. 1955).

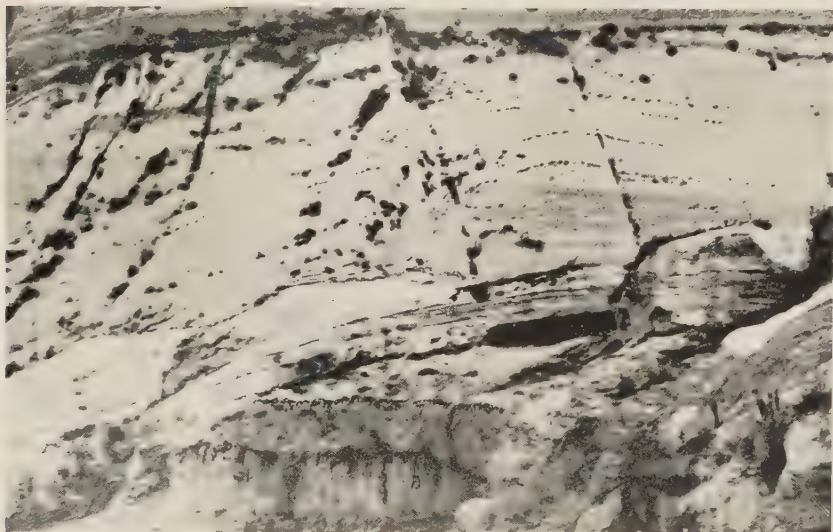



Fig. 1. — Ponti Rossi - Capodichino; il gradino. Dal basso in alto: la breccia e il banco di tufo campano, ricoperti, con discordanza, da sabbie e dal « tasso ». In secondo piano la parete delle pozzolane del secondo periodo (parete settentrionale) (fot. A. SCHERILLO, ottobre 1955).

Fig. 2. — Ponti Rossi - Capodichino; parete settentrionale. Stratificazione incrociata e discordanze nelle pozzolane del secondo periodo, in corrispondenza del gradino. Sopra: le formazioni del terzo periodo (fot. B. DE NISCO, giugno 1953).

Fig. 1. — Ponti Rossi. Cava di tufo giallo, nel quale è stata aperta una galleria. I solchi di erosione interessano la pozzolana e si arrestano in corrispondenza del tufo giallo. La massa grigia sovrastante è la lente di pozzolana e sabbie (fot. M. SCHERILLO, ottobre 1955).

Fig. 2. — Cava Improta; formazioni di copertura del terzo periodo, rappresentate nello schizzo della fig. 5 nel testo (fot. B. DE NISCO, giugno 1953).

Fig. 3. — Cava Alderisi: «tasso». Dal basso in alto: humus violaceo, « tasso » (straterelli chiari e scuri) con traccie di erosione, pozzolane del secondo periodo (scure) (fot. A. PESCE, giugno 1955).

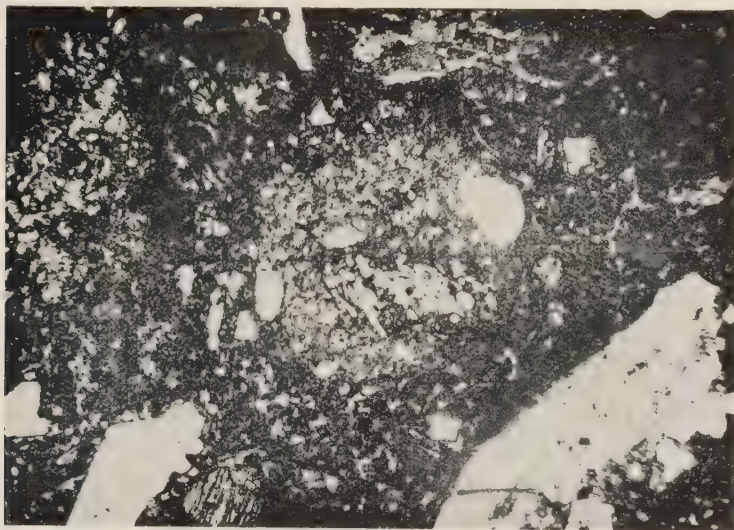



Fig. 1. — Tufo giallo, pisolitico, cava Improta. Al centro, una pisolite distinguibile per il nucleo più chiaro; in basso a destra una pomice di medie dimensioni; a sinistra un frammento di sanidino.

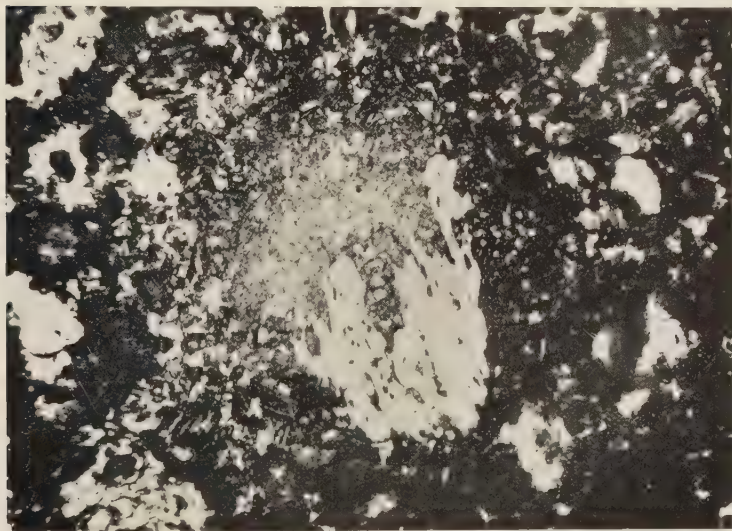



Fig. 2. — Tufo giallo, cava Improta. Pisolite inglobante un frammento di pomice. Intorno piccole pomici ingiallite (scure) con sostanza interstiziale (chiara).

Sopra il tufo campano si hanno pozzolane con pomici e sabbie, poi un humus violaceo (in complesso cm 50).

A questa formazione se ne sovrappone un'altra, costituita in basso da tre straterelli di pomici (cm 30) e sopra da sabbie e lapilli; anche questa formazione è chiusa da uno straterello di humus violaceo. La potenza totale di queste due formazioni è di quasi 2 metri.

Il « tasso » anche qui costituisce il suolo del piano di cava superiore ed è perfettamente identico a quello delle cave Improta. Questo conferma chè non si tratta di una formazione rimaneggiata.

Le pozzolane del 2° periodo hanno una potenza di circa 25-30 metri e hanno un' evidente stratificazione incrociata. Superiormente presentano una superficie di erosione con uno straterello di humus.

Vengono quindi pozzolane e sabbie (m 1,50) e poi le « pomici principali », per lo più ricoperte direttamente dal terreno vegetale attuale.

Poichè manca in questa cava il tufo giallo, si deve concludere che il tufo delle cave Improta rappresenti una massa isolata, oppure si colleghi più a sud col tufo giallo della collina dell' Osservatorio di Capodimonte.

Accennerò infine alla grande cava Alderisi lungo la calata Capodichino (sulla destra di chi sale), per quanto non rientri nell' ambito del vallone dei Ponti Rossi. perchè anche in questa sono messe in tutta evidenza le formazioni del primo periodo.

Si tratta di una breccia che superiormente passa a un tufo poco coerente, giallastro, con molti inclusi, grosse pomici e scorie nere. La potenza visibile di questi prodotti è di circa m 7. Sopra si ha una fascia di humus violaceo, poi il « tasso » perfettamente identico a quello dei Ponti Rossi. In questa cava la superficie del tasso mostra tracce di erosione e rimaneggiamento (tav. IV, fig. 3), e ciò sembra indicare un certo intervallo tra la deposizione del tasso e quella delle successive pozzolane del secondo periodo. Queste hanno una potenza di m 30 circa e, forse, a metà altezza, vi si interpone uno strato di humus, per altro molto dubbio. Niente di nuovo si nota nei prodotti del terzo periodo. I prodotti vesuviani qui compaiono con evidenza e sono rappresentati da 2 m di ceneri grigie stratificate che sfumano nel terreno agrario attuale.

§ 3) *Studio chimico petrografico dei prodotti del secondo periodo.*

Lo studio chimico delle pozzolane del secondo periodo non solo è premessa indispensabile per trattare il processo di trasformazione pozzolana → mappamonte → tufo giallo, ma presenta pure un suo proprio interesse perchè finora di questi prodotti non si aveva nessuna analisi chimica.

A questo scopo ho voluto eseguire numerose analisi perchè, trattan-

dosi di un materiale piroclastico, la composizione può variare, anche localmente.

Le due analisi seguenti si riferiscono però al « tasso », il quale non può essere classificato come pozzolana, poichè sembra non possedere proprietà idrauliche, ciò che è provato dal fatto che i cavatori cessano lo scavo quando lo incontrano.

Accanto alle analisi riporto i relativi valori di NIGGLI. Nella rappresentazione ho introdotto alcune leggere modifiche. Con *f* e con *m* rappresento rispettivamente i quozienti molecolari per FeO e MgO (la somma *m* + *f* è naturalmente *mg*) e, invece di *alc*, riporto *kal* (per K_2O) e *natr* (per Na_2O). Il coefficiente *aq* rappresenta l' acqua totale e si calcola, come per *si*, con riferimento alla somma delle basi portata a 100, e *oss* il rapporto molecolare tra 2 Fe_2O_3 presente e FeO totale (calcolato supponendo che tutto il ferro sia allo stato bivalente) [4].

	A	B
SiO_2	57.38	57.29
TiO_2	0.42	0.42
ZrO_2	0.02	0.05
AlO_3	17.93	17.83
Fe_2O_3	2.50	2.22
FeO	1.45	1.45
MnO	0.10	0.12
MgO	0.42	0.68
CaO	2.00	2.47
BaO	0.06	tr.
K_2O	6.57	6.77
Na_2O	5.27	5.20
Cl_2	0.04	0.03
SO_3	0.04	0.03
P_2O_5	0.07	0.08
CO_2	—	—
H_2O^-	1.23	0.78
H_2O^+	4.57	4.54
	100.07	99.96

Valori di NIGGLI [5])

	A		B	
si	225.5		217.6	
al	41.2		39.9	
f	12.5	15.1 (fm)	11.4	15.2
m	2.6		3.8	
c	7.2		9.5	
kal	16.4	36.5 (alc)	16.2	35.4
natr	20.1		19.2	
k	0.45		0.46	
mg	0.17		0.26	
oss	0.59		0.60	
aq	76.0		67.3	
$\frac{al}{alc+c}$	0.96		0.89	
Si^0	0.93		0.90	

A — Ponti Rossi - Capodimonte « tasso »; (an. SCHERILLO).
B — Ponti - Capodichino; Cava Improta « tasso »; (an. SCHERILLO).

---

[4]) A FeO aggiungo MnO.

[5]) Supponendo che Cl_2 e SO_3 siano uniti a Na_2O e P_2O_5 a 3CaO, ho eseguito, per tutte le analisi, prima del calcolo dei valori di Niggli, le corrispondenti detrazioni. Quando è presente CO_2 ha detratto da CaO la quantità corrispondente a CO_2.

Il tipo magmatico — se può parlarsene per una roccia piroclastica — è kalifoyaitico. Questo almeno sembra il più probabile tipo di lava corrispondente.

Le analisi che riporto ora si riferiscono a tipiche pozzolane del secondo periodo. Tali analisi sono state ordinate per decrescenti valori di *si*.

Si può rilevare che le pozzolane che si trovano ai due estremi della serie provengono dalla stessa località (Pèsole d' Arpino) ed anzi sono state raccolte lungo la stessa verticale. Ad ogni modo la variazione della composizione chimica è, per l' insieme delle pozzolane, piuttosto limitata. E' evidente l' analogia col « tasso ».

L' analisi C si riferisce al n. 9 della fig. 2, la H al n. 8. La differenza di tinta di queste due pozzolane di Pèsole d' Arpino dipende probabilmente dal grado di ossidazione del ferro. La « pozzolana chiara » dell' analisi E è stata raccolta nella cava più meridionale, prospiciente ai Ponti Rossi, in prossimità del « tasso ». Quella dell' analisi F proviene dalla parete settentrionale, poco più ad est del gradino, in prossimità del « tasso ». E' la comune pozzolana, frammista a pomici. L' analisi ne sostituisce un' altra, riportata in mio lavoro precedente, [1]) che considero non soddisfacente. La pozzolana dell' analisi G è stata raccolta allo stesso livello nella cava ora abbandonata sul fianco opposto del vallone. Infine l' analisi E si riferisce a una pozzolana raccolta nel vallone di Miano, in corrispondenza del ponte della strada Capodimonte - Miano.

Al quadro delle analisi segue quello dei valori di NIGGLI.

Le conclusioni generali su questi risultati analitici le riserbo a dopo che avrò riportato tutte le analisi di pozzolane.

Le tre serie che seguono illustrano la trasformazione pozzolana → mappamonte → tufo. I campioni di ciascuna sono stati prelevati, dove era possibile, a breve distanza uno dall' altro.

Purtroppo nella prime serie, che si riferisce alla parete settentrionale delle cave Ponti Rossi - Capodichino, il campione di tufo è stato raccolto nella cava di tufo giallo ora abbandonata, cioè non a contatto immediato col mappamonte e la pozzolana. Il valore di questa prima serie è perciò minore di quello delle altre due.

---

[6]) SCHERILLO A. *Sulla revisione del foglio « Napoli » della Carta Geologica d'Italia.* Boll. Serv. Geol. d'It., vol. LXXV, pag. 825 (an. II), Roma, 1953.

	C	D	E	F	G	H
SiO_2	57.64	57.68	57.66	57.24	57.63	56.18
TiO_2	0.44	0.45	0.41	0.40	0.40	0.45
ZrO_2	0.05	0.05	0.04	0.03	0.04	0.05
Al_2O_3	17.65	17.88	17.50	17.39	17.60	17.98
Fe_2O_3	2.35	1.77	1.39	2.17	2 50	1.67
FeO	1.89	1.90	2.12	2.10	1.54	3.22
MnO	0.10	0.08	0.13	0.13	0.10	0.10
MgO	0.62	0.67	0.66	0.93	0.78	1.12
CaO	2.40	2.62	3.23	2.43	2.56	3.82
BaO	0.06	0.06	0.05	0.02	0.08	0.03
K_2O	7.33	6.64	6.90	7.03	6.95	7.45
Na_2O	3.78	4.62	4.80	4.17	4.82	3.61
Cl_2	0.05	0.04	0.07	0.03	0.03	0.02
SO_3	0.02	0.06	0.02	0.04	0.03	0.03
P_2O_5	0.09	0.12	0.09	0.03	0.04	0.03
CO_2	—	—	—	-	—	—
H_2O^-	0.79	0.86	0.53	0.56	0.69	0.70
H_2O^+	4.89	4.35	4.90	5.25	4.31	3.77
	100.15	99.85	100.50	99.95	100,10	100.23

C. — Pesole d' Arpino; pozzolana inferiore (an. SCHERILLO).
D. — Ponti Rossi - Capodichino, parete sud; pozzolana chiara (an. SCHERILLO).
E. — Miano; (an. SCHERILLO).
F. — Ponti Rossi - Capodichino, parete nord; pozzolana pomicea (an. SCHERILLO).
G. — Ponti Rossi - Capodimonte; pozzolana (an. SCHERILLO).
H. — Pesole d' Arpino; pozzolana superiore (an. SCHERILLO).

	C		D		E		F		G		H	
si	224.8		224.5		218.9		217.8		216.7		200.9	
al	40.5		40.9		39.2		39.0		39.0		37.8	
f	13.6	17.3 (fm)	11.7	15.7	11.2	15.3	13.3	18.5	12.3	16.5	14.3	20.3
m	3.7		4.0		4.1		5.2		4.2		6.0	
c	9.6		10.0		11.3		10.0		10.4		12.5	
kal	18.3	32.6 (alc.)	16.3	33.4	16.6	34.2	17.2	32.5	16.7	33.1	17.0	29.4
natr	14.3		17.1		17.6		15.3		17.4		12.4	
k	0.53		0,49		0.49		0.53		0.49		0.58	
mg	0.21		0.26		0.27		0.28		0.26		0.30	
oss	0.50		0.44		0.37		0.47		0.59		0.32	
aq	71.3		67.6		71.9		73.6		62.6		53.2	
$\frac{al}{alc+c}$	0.96		0.94		0.86		0.94		0.88		0.90	
Si^0	0.98		0.95		0.93		0.94		0.92		0.92	

Tipo magmatico: leucosienitico — kalifoyaitico.

	I	L	M
SiO_2	56.97	56.07	51.00
TiO_2	0.22	0.22	0.20
ZrO_2	0.04	0.04	0.03
Al_2O_3	17.95	18.81	16.57
Fe_2O_3	2.09	1.90	3.77
FeO	2.03	1.89	0.28
MnO	0.10	0.12	0.10
MgO	1.00	0.95	0.98
CaO	2.89	2.68	2.76
BaO	0.09	0.12	0.06
K_2O	7.22	7.01	6.04
Na_2O	3.97	3.74	4.54
Cl_2	0.03	0.06	0.18
SO_3	0.01	0.07	0.18
P_2O_5	0.06	0.04	0.12
CO_2	—	—	0.53
H_2O^-	0.80	1.36	5.22
H_2O^+	4.53	5.41	7.95
	100.00	100.49	100.51

Valori di Niggli

	I	L	M
si	211.5	213.0	209.3
al	39.0	41.9	40.1
f	12.4 } 18.0	11.6 } 17.1	12.9 } 19.0
m	5.6	5.5	6.1
c	11.6	10.9	8.4
kal	17.1 } 31.4	16.9 } 30.1	15.8 } 32.5
natr	14.3	13.2	6.7
k	0.54	0.56	0.49
mg	0.31	0.32	0.32
oss	0.46	0.47	0.90
aq	65.9	85.7	180.3
$\frac{al}{alc+c}$	0.91	1.02	0.98
Si^0	0.94	0.97	0.91

Tipomagmatico: leucosienitico-kalifoyaitico

Ponti Rossi - Capodichino, parete settentrionale, estremità verso i Ponti Rossi.

I — Pozzolana (an. Scherillo).
L — Mappamonte (an. Scherillo).
M — Tufo giallo (an. Scherillo).

	N	P	Q
SiO_2	56.25	54.67	51.27
TiO_2	0.38	0.39	0.41
ZrO_2	0.05	0.06	0.06
Al_2O_3	17.52	18.22	16.85
Fe_2O_3	2.24	2.20	4.00
FeO	2.28	2.10	0.35
MnO	0.10	0.10	0.10
MgO	1.24	1.19	1.04
CaO	3.01	3.28	3.47
BaO	0.06	0.07	0.07
K_2O	6.69	6.85	6.59
Na_2O	4.47	3.41	3.16
Cl_2	0.03	0.05	0.17
SO_3	0.04	0.03	0.26
P_2O_5	0.21	0.10	0.18
CO_2	-	—	0.40
H_2O	0.87	2.34	5.06
H_2O^-	4.59	5.12	6.54
	100.03	100.18	99.98

Valori di Niggli

	N		P		Q	
si	205.2		202.4		207.0	
al	37.7		39.6		40.2	
f	13.4	20.1	13.0	19.6	13.6	19.9
m	6.7		6.6		6.3	
c	11.0		12.1		11.8	
kal	15.5	31.2	16.2	28.4	17.0	28.1
natr	15.7		12.2		11.1	
k	0.50		0.57		0.60	
mg	0.34		0.34		0.32	
oss	0.46		0.48		0.89	
aq	66.4		92.0		155.9	
$\frac{al}{alc+c}$	0.89		0.97		1.03	
Si'	0.91		0.94		0.98	

Ponti Rossi - Capodichino, parete meridionale, estremità verso i Ponti Rossi, cava Improta (i campioni provengono da un medesimo « relitto »).

N — Pozzolana (n. SCHERILLO).

P — Mappamonte (an. SCHERILLO).

Q — Tufo giallo (an. SCHERILLO).

	R	S	T
SiO_2	56.04	54.30	51.36
TiO_2	0.42	0.42	0.42
ZrO_2	0.03	0.05	0.03
Al_2O_3	17.79	17.40	16.84
Fe_2O_3	2.07	2.65	3.90
FeO	2.80	2.12	0.84
MnO	0.12	0,15	0.14
MgO	1.19	0.92	0.99
CaO	3.47	3.61	3.47
BaO	0.06	0.08	0.05
K_2O	7.43	6.93	6.57
Na_2O	4.17	3.00	2.57
Cl_2	0.05	0.06	0.09
SO_3	0.05	0.05	0.04
P_2O_5	0.10	0.08	0.13
CO_2	—	—	0.44
H_2O^-	0.60	2.65	4.96
H_2O^+	3.79	5,70	7.55
	100,18	100.17	100.39

Cava al bivio Miano-Marianella Piscinola

R. — Pozzolana (an. SCHERILLO)

S. — Mappamonte (an. SCHERILLO)

T. — Tufo giallo (an. SCHERILLO).

Valori di NIGGLI

	R		S		T	
si	195.4		205.2		207.2	
al	36.6		38.8		40.2	
f	14.2	20.5	14.8	20.0	15.3	21.3
m	6.3		5.2		6.0	
c	12.5		14.2		11 9	
kal	16.6	30.4	16.6	27.0	17.0	26.6
n atr	13.8		10.4		9.6	
k	0.54		0.61		0.64	
mg	0.31		0.26		0.28	
oss	0.40		0.51		0.76	
aq	50.1		104.8		168.2	
$\frac{al}{alc+c}$	0.85		0.93		1.05	
Si^0	0.89		0.99		1.00	

Tipo magmatico: leucosienitico-kalifoyaitico

Come si vede, il passaggio non comporta grandi variazioni nella composizione chimica salvo per quanto riguarda l' acqua: infatti il coefficiente *aq* viene, in media, triplicato. Nel passaggio dal mappamonte al tufo si ha anche una notevolissima ossidazione del ferro.

Per cogliere le variazioni ho calcolato le medie i valori di Niggli per le analisi rispettivamente di pozzolana, mappamonte, tufo, ottenendo i seguenti dati.

	Pozzolana		Mappamonte		Tufo giallo	
si	204.2		206.8		207.8	
al	37.8		39.9		40.2	
f	13.3	19.5 (fm)	13.1	18.9	13.8	20.0
m	6.2		5.8		6.2	
c	11.7		12.7		10.7	
kal	16.4	31.0 (alc)	16.6	28.5	16.6	29.1
natr	14.6		11.9		12.5	
k	0 53		0.58		0.57	
mg	0.32		0.31		0.31	
oss	0.44		0.49		0.85	
aq	60.8		94.5		168.1	
$\frac{al}{alc + c}$	0.88		0.97		1.01	
Si^0	0.91		0.97		0.96	

Questo procedimento è criticabile perchè la media viene fatta tra valori che oscillano in modo un pò irregolare e perchè il tufo giallo dell'analisi M non è, come ho detto, a immediato contatto col mappamonte e colla pozzolana (si tratta però di un tufo giallo tipico), ma penso che almeno valga a mostrare quali variazioni tendono a verificarsi.

Attribuendo dunque valore dimostrativo a queste medie, vediamo che l' aumento dell' acqua e l'ossidazione del ferro sono specialmente sensibili nel passaggio mappamonte → tufo, mentre le altre variazioni, che in complesso sono poco rilevanti, si verificano sopratutto nel passaggio pozzolana → mappamonte. E' noto che è in questo passaggio che il materiale perde le proprietà idrauliche. Queste si riducono a un lieve aumento di *si* e di *al* e ad una corrispondente diminuzione di *alc* o, meglio, di *natr*. Bisogna però notare che, come ho avvertito, ho supposto che Cl_2 e SO_3 siano legati al sodio, perciò le corrispondenti detrazioni sono avvenute solo a spese di *natr*.

Il più alto valore di *c* nel mappamonte, se non è originario, cioè dovuto ad una maggiore percentuale di composti di Ca nei campioni, potrebbe

essere attribuito ad arricchimento indiretto, ossia ad una maggiore resistenza dei minerali di Ca rispetto a quelli alcalini. Quando però dal mappamonte si passa al tufo, *c* diminuisce perchè una parte di Ca si lega a CO_2 e questa parte non viene computata nel calcolo dei valori di NIGGLI.

E' evidente, quindi, che l' agente principale della trasformazione è stata l' acqua a cui si sono aggiunti CO_2, SO_3, Cl_2 (quest' ultimo è stato forse l' agente dell' ossidazione) [1]). Il fatto poi che il tufo rappresenta il nucleo della formazione delle pozzolane indica che si tratta dei componenti volatili, che si svolgevano dai depositi piroclastici stessi. Tale azione è stata nulla o quasi nulla nei materiali sedimentati troppo lontano dalle bocche eruttive, perchè i prodotti piroclastici si erano già prima del deposito raffreddati e impoveriti dei prodotti volatili, mentre a distanza non eccessiva, è limitata alle parti più profonde perchè queste, per l' azione protettiva degli strati sovraincombenti, rimangono più a lungo a temperatura maggiore e a contatto coi componenti volatili. Secondo me le numerose e piccole pisoliti, che si notano nel mappamonte, si sono appunto formate per la condensazione del vapor d' acqua che si sprigionava dalla massa..

Il tufo giallo non si è quindi formato per diagenesi, ma per autometamorfismo.

Un problema interessante è la funzione dell'acqua nel tufo.

Poichè il rapporto $\frac{al}{alc + c}$ è maggiore che nelle pozzolane corrispondenti e talora un pò superiore a 1, si potrebbe pensare che il processo di trasformazione delle pozzolane nel tufo sia un processo di caolinizzazione. E' probabile che il processo avvenga, però in scala assai ridotta, come è mostrato dai valori di *alc* dei tufi, di poco minori di quelli delle pozzolane. Ad ogni modo, per togliere ogni dubbio in proposito, ho pregato il prof. R. Sersale dell' Istituto di Chimica Industriale dell' Università di Napoli, di eseguire l' analisi termoponderale sulla pozzolana, sul mappamonte e sul tufo giallo (analisi N, P, Q) e su quest' ultimo anche l'analisi termodifferenziale. Nelle figure 6, 8, 9 e 10 sono riprodotti i risultati di queste analisi, gentilmente favoritimi dal prof. Sersale, che ringrazio vivamente. Termine di paragone è il caolino di Laconi (fig. 7 - 11). Le analisi dimostrano che i materiali non contengono minerali del gruppo del caolino in quantità apprezzabile.

Molto più verosimile sembra invece la presenza nel tufo come minerale neoformato di zeoliti [1]). Tuttavia nelle sezioni sottili di tufo, che ho esa-

---

7) Non sembra che i composti di fluoro abbiano grande importanza in questa trasformazione. Infatti nel tufo dell'analisi Q ho trovato solo 0.02 di F_2 (determinato col metodo colorimetrico).

8) GALLITELLI P., OLIVERO S., PENTA F., *IV Congresso Internazioale di sedimentologia.* « Ricerca Scientifica », Anno 24, n. 12, pag. 2670-2675, Roma, 1954.

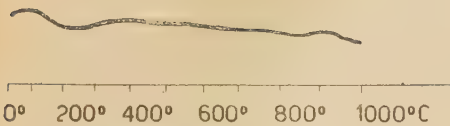



Fig. 6. — Analisi termodifferenziale del tufo giallo della cava Improta.

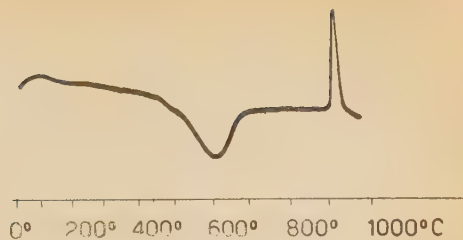



Fig. 7. — idem del caolino di Laconi.

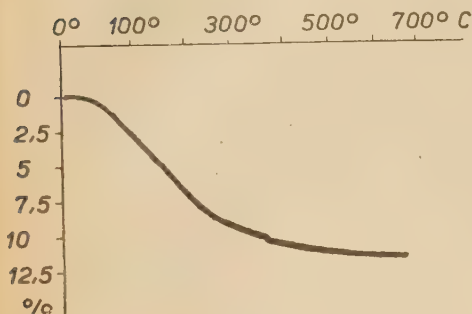



Fig. 8. — Analisi termoponderale del tufo giallo della cava Improta.

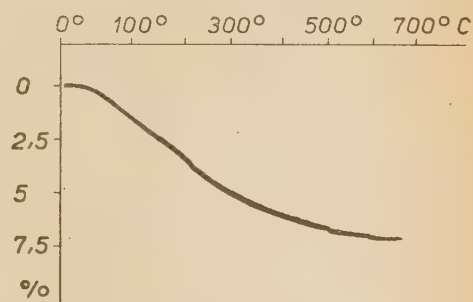



Fig. 9. — idem del mappamonte.

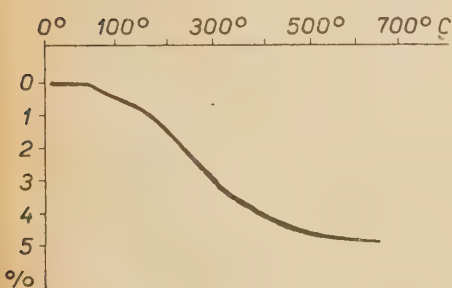



Fig. 10. — idem della pozzolana.

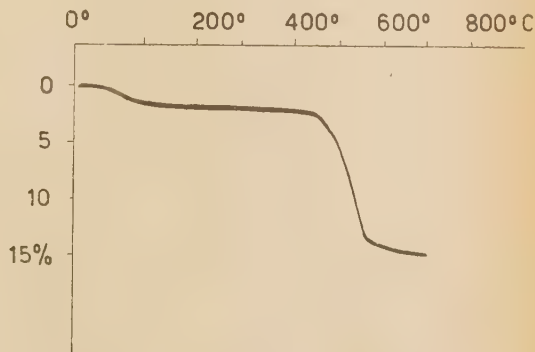



Fig. 11. — idem del caolino di Laconi.

minato non estistono, come dirò, cristalli evidenti di zeoliti, eppure, dato il tenore d' acqua, queste dovrebbaro invece essere uno dei principali costituenti .

In attesa quindi di poter dimostrare la presenza nel tufo di tali minerali si può fare l' ipotesi che l' acqua sia fissata dalle parti più fini delle pozzolane, quella allo stato vetroso, non sappiamo se con un legame pu-

ramente fisico o anche chimico e in tal caso con formazione di nuovi composti corrispondenti alle mutate condizioni di equilibrio.

Per quanto riguarda i costituenti delle pozzolane e la loro granulometria, rimando alle opere tecniche che ne trattano [9]). Basta accennare che le pozzolane sono costituite da pomici o frammenti di pomici, piccole scorie, frammenti di ossidiana e da rari cristallini di felspato e di pirosseno e inoltre dalla « cenere » rappresentata dai frammenti più minuti della parte vetrosa e cristallina.

Nessuna sezione sottile è stato possibile ricavare dal mappamonte, che è troppo friabile, mentre ho avuto l' insolita fortuna di avere delle ottime sezioni sottili per il tufo giallo.

I costituenti del tufo sembrano gli stessi delle pozzolane e non ho potuto osservare nessuna neoformazione cristallina, neppure la calcite, che pure è sicuramente presente (1 % in peso). Il tufo risulta di un impasto di pomici, per la maggior parte piccolissime. Nelle pomici maggiori si nota che spesso le trabecole di sostanza vetrosa sono birifrangenti. Rari i frammenti cristallini (sempre perfettamente freschi) di sanidino, plagioclasio labradoritico, pirosseno verde chiaro. La massa è attraversata da qualche piccola venatura di ossidi di ferro. Questi costituenti sono cementati da una sostanza interstiziale isotropa, giallastra, che si salda interamente colle pomici tanto più che queste sono contornate da un orlo giallastro che passa alla sostanza interstiziale.

Tale sembra la struttura tipica del tufo non a contatto immediato col mappamonte e la pozzolana. In questo secondo caso, niente è cambiato per quanto riguarda i costituenti maggiori, mentre la sostanza cementante è ben distinta dal resto e di colore più chiaro.

Se poi il tufo è pisolitico (e spesso lo è nella zona di passaggio al mappamonte) le pisoliti in sezione sottile si mostrano costituite da una zona centrale più chiara colla sostanza interstiziale che cementa perfettamente i frammenti e da un anello della stessa sostanza, più scura, alla periferia.

Penso che tale sostanza interstiziale si sia formata a spese della base vetrosa delle pomici per azione dei costituenti volatili; è a questa sostanza che è dovuta la cementazione del materiale piroclastico e questo è probabilmente il composto idrato. Qui inoltre potrebbero essere contenute le eventuali zeoliti, che non si formano certo a spese dei felspati, i quali rimangono praticamente inalterati.

---

[9]) COTECCHIA V. *Vecchie vedute e nuove ricerche sulle pozzolane.* « Atti Fondaz. Politecnica del Mezzogiorno », vol. IV, pag. 527-564, Napoli, 1952.

§ 4) *Le pomici del secondo periodo.*

Le pozzolane dei Ponti Rossi contengono, oltre alle pomici di piccole dimensioni e in frammeti, anche pomici di dimensioni abbastanza notevoli, di colore grigio, non rotolate. Ho analizzato una di queste pomici contenuta nella « pozzolana pomicea » dell' analisi F. Ho inoltre analizzato, per confronto, una pomice contennta nel tufo giallo attraversato dalla galleria dell' acquedotto di Napoli, scavata recentemente tra le Fontanelle e il vallone Ricciardi (al Vomero). Questa pomice era coerente e di color grigio nel nucleo, gialla rossastra e incoerente alla periferia : ho perciò analizzato separatamente queste due parti. Accanto a questa analisi pongo quella di una pomice grigia contenuta nel tufo giallo del M. Gauro, che ho già riportato in un mio precedente lavoro [1])

	U	V	Z	a
SiO_2	57.51	57.78	51.59	57.50
TiO_2	0.22	0.40	0.40	0.23
ZrO_2	0.07	0.06	0.08	0.07
Al_2O_3	18.23	18.00	18.17	16.93
Fe_2O_3	1.46	1.08	3.15	2.75
FeO	2.24	2.31	—	2.11
MnO	0.11	0.14	0.10	0.10
MgO	0.51	0.28	0.26	0.84
CaO	3.09	3.31	3,40	2.94
BaO	0.04	tr.	0.02	0.08
K_3O	7.60	6.11	3.32	6.36
Na_2O	4.56	5.54	4.18	4.20
Cl	0.03	0.05	0.02	0.08
SO_3	0.03	0.05	—	0.05
P_2O_5	0.06	0.03	0.08	0.16
CO_2	—	—	—	—
H_2O^-	0.22	0.07	5.58	0.25
H_2O^+	4.17	4.61	10.04	5.14
	100.15	99.82	100.39	99.79

U — Ponti Rossi - Secondigliano ; pomice grigia nella pozzolana SCHERILLO.

V — Galleria Fontanelle - Vallone Ricciardi ; pomice nel tufo, nucleo grigio (an. SCHERILLO).

Z — Ibid „ „ ; id : parte ingiallita (an. SCHERILLO)

a — M. Gauro, pomice grigia nel tufo (an. SCHERILLO)

[1]) SCHERILLO A. *Petrografia chimica dei tufi flegrei.* I) *Il tufo giallo.* « Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat », Serie 4ª, vol. XVII, pag. 363, Napoli, 1950.

	U		V		Z		a	
si	213.0		218.8		225.9		220.7	
al	39.6		39.8		46.8		38.1	
f	11.3	14.2 (fm)	10.7	12.3	10.7	12.3	15.0	19.8
m	2.9		1.6		1.6		4.8	
c	12.0		13.1		13.9		11.5	
kal	18.0	33.2 (alc)	14.8	34.8	9.1	27.0	15.4	30.6
natr	15.2		20.0		17.9		15.2	
k	0.53		0.43		0.33		0.50	
mg	0.20		0.13		0.13		0.24	
oss	0.35		0.25		1.00		0.52	
aq	54.2		59.1		228.3		68.9	
$\frac{al}{alc + c}$	0.87		0.84		1.14		0.90	
Si^0	0.91		0.92		1.09		1.00	

Tipo magmatico U. V : kalifoyatico.
a : leucosienitico.

Per quanto riguarda il disfacimento e ingiallimento delle pomici credo che in base ai risultati delle analisi V e Z, possa considerarsi dovuto all' azione delle acque vadose, che imbevono il tufo e specialmente, per la loro porosità, le pomici, lisciviandone gli alcali e sopratutto il potassio.

Questa azione è probabilmente in atto in tutti i tufi e contribuirebbe ad abbassarne ulteriormente il tenore degli alcali [1]).

1) Oltre ai lavori citati, per la zona orientale di Napoli v. CASTALDI F. *I crateri orientali di Napoli*. Bull. volcanol., Serie II, vol. II, pag. 143-171. Napoli 1937.

Processo verbale dell' adunanza del dì 8 gennaio 1955.

Presiede il presidente Diamare, segretario il socio D' Erasmo. Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Carrelli, Colamonico, De Lorenzo, Galli, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato, ed i corrispondenti Beretta, Cennamo e Galgano.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 4 dicembre 1954, che è approvato.

Nel prendere possesso della sua carica, il presidente rivolge parole di saluto e di augurio per il nuovo anno ai colleghi, i quali ringraziano.

Il segretario comunica una lettera del prof. Francesco Cennamo, che ringrazia l' Accademia per la sua nomina a socio corrispondente nella Sezione di scienze naturali. Dà poi notizia delle decisioni prese dal Consiglio Generale della Società nell' adunanza del 29 dicembre.

Il socio Colamonico presenta ed offre in omaggio i volumi IX e X delle *Memorie di geografia economica*, editi dal Centro di studi per la geografia economica da lui diretto (B. Nice, *Geografia e pianificazione territoriale*; G. Merlini, *La Romagna frutticola)*. Il presidente, a nome dell' Accademia, ringrazia.

Il socio Imbò riferisce, tanto in nome proprio che dei colleghi Carrelli e D' Erasmo, sulla nota del dott. Pio VITTOZZI, *Sul solarigrafo di Gorezynski N° 327*, proponendone l'inserzione nel Rendiconto. L'Accademia unanime approva.

Il socio Carrelli presenta, per il Rendiconto, una nota della dott. Anna CIBELLI dal titolo *Misure in alta frequenza della conducibilità di elettroliti forti e diboli*. Viene incaricata di riferire la Commissione composta dai soci Carrelli, Imbò e Cennamo.

Il socio Galli presenta, per lo stesso periodico, una nota del dott. Ing. Tullio RENZULLI, *I diagrammi delle massime sollecitazioni nei ponti ad arco sottile e trave irrigidente*. Il presidente nomina la Commissione Galli, Miranda e Tolotti con l' incarico di riferire su di essa in una prossima adunanza.

Il socio Colamonico presenta, pure per il Rendiconto, una nota del dott. Cristofaro MENNELLA, *Sulla variabilità e instabilità del regime pluviometrico annuale nel Napoletano*. Il presidente invita i soci Colamonico, Imbò e D'Erasmo a riferire su questo lavoro nella tornata successiva

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 febbraio 1955.

Assistono all' adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Diamare, Galli, Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato ed il corrispodente Panizzi.

Presiede il presidente Diamare, segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 8 gennaio, che

è approvato. Indi partecipa con dolore essergli ora giunta la notizia della morte — avvenuta in Brasile nel corso dell'anno 1954 — del socio straniero Ignacio Manuel AZEVEDO DO AMARAL, professore di Geometria analitica e Calcolo infinitesimale nella Scuola Politecnica di Rio de Janeiro, appartenente alla Sezione di Scienze matematiche dal 27 settembre 1940. Poscia comunica che nell' adunanza plenaria della Società del 30 gennaio il presidente generale Pontieri ha aperto la busta sigillata col motto « Chi spera, vive » che accompagnava la memoria dal titolo *Sopra gli elementi modulari in un gruppo G, finito*, giudicata meritevole del premio di lire 50.000 nel concorso scaduto il 30 ottobre scorso, e che è risultato autore di detto lavoro il dott. Giovanni ZACHER (Seminario matematico di Padova). Aggiunge che autore dell' altro lavoro, contraddistinto dal motto « Non c' è scienza senza ritener lo avere inteso » e portante il titolo *Gli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi di un gruppo*, che ha meritato l' *accessit*, è risultato essere il dott. Mario CURZIO di Napoli.

Presenta quindi l' *Annuario 1955* della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, nonchè il Rendiconto dell' Accademia dell' anno 1954, in corso di distribuzione ai soci.

Dà successivamente notizia della Ministeriale 10 gennaio, relativa alla concessione di un contributo di lire 250.000 per la stampa del Rendiconto, sul fondo che l' Ente per la Cellulosa e la Carta riserva alle riviste di elevato valore culturale.

Informa infine che con lettera 25 gennaio, n. 14267, il Ministero ha comunicato l' approvazione della nomina del prof. Nicolò Spampinato a vice-presidente dell' Accademia e del prof. Giuseppe Catalano a socio ordinario residente nella sezione delle Scienze naturali.

La Commissione Carrelli, Imbò e Cennamo riferisce sulla nota della dott. Anna CIBELLI, *Misure in alta frequenza della conducibilità di elettroliti forti e deboli*, proponendone l' accoglimento per la stampa nel Rendiconto.

Uguale parere esprimono la Commissione Galli, Miranda e Tolotti nei riguardi della nota del dott. Tullio RENZULLI, *Diagrammi delle massime sollecitazioni nei ponti ad arco sottile e trave irrigidente*, e la Commissione costituita dai soci Colamonico, Imbò e D' Erasmo per la nota del dott. Cristofaro MENNELLA, *Sulla variabilità e instabilità del regime pluviometrico annuale nel Napoletano.*

Con tre distinte votazioni l' Accademia approva all' unanimità le proposte predette.

Il socio GALLI presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Ancora in margine alla indipendenza dei principî di reciprocità.*

Il socio SPAMPINATO presenta, pure per il Rendiconto, una sua nota, *Inviluppo e congruenza delle tangenti ai rami di una falda bidimensionale piana o tridimensionale dell' S_3.*

Il socio tesoriere Scherillo presenta il bilancio consuntivo dell' anno 1954. L' Accademia nomina revisori dei conti i soci Salfi e Galli, con l'incarico di riferire in una delle prossime adunanze.

Processo verbale dell' adunaza del dì 5 marzo 1955.

All' adunanza, presieduta dal presidente Diamare, assistono i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segretario), Giordani, Imbò, Miranda, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo e Spampinato.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 febbraio, che è approvato.

Indi comunica la richiesta di cambio delle pubblicazioni accademiche pervenuta dalla Stazione Sperimentale « De aula Dei » di Saragoza (Spagna), che offre i suoi Annali e Bollettini, relativi a lavori di botania e di agraria. L' Accademia accoglie la domanda, offrendo il cambio del Rendiconto.

Il presidente legge la lettera recentemente pervenutagli dal Comitato promotore per le onoranze al prof. Mario Picone, in occasione del suo prossimo collocamento fuori ruolo per limiti di età, e partecipa che ha entusiasticamente accolto l' invito, in essa contenuto, di far parte del Comitato d' onore, inviando la fervida adesione sua e dei colleghi tutti.

Il socio Spampinato presenta una sua nota *Sulle condizioni di razionalità per una superficie tripotenziale*, destinata alla stampa del Rendiconto.

Il socio Giordani presenta, per la inserzione nel medesimo periodico, una nota della prof. Silvia Restaino, dal titolo : *Analisi chimica di alcuni prodotti del Somma-Vesuvio.* Il presidente costituisce la Commissione Giordani, Bakunin e Scherillo, con l' incarico di riferire su questo lavoro nella prossima adunanza.

Il socio Salfi, anche a nome del Collega Galli, legge la relazione dei revisori dei conti sul bilancio consuntivo 1954, la quale si chiude con la proposta di approvazione, con un plauso al socio tesoriere. L' Accademia approva alla unanimità.

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 aprile 1955.

Sono presenti i soci ordinari residenti Catalano, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Imbò, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato ed i corrispondenti Beretta, Montalenti, Orrù.

Funziona da presidente il vice-presidente Spampinato, segretario il socio D' Erasmo.

Scusa l' assenza il presidente Diamare, indisposto.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 marzo, che è approvato. Indi comunica la lettera del dott. Giovanni Zacher da Padova,

che ringrazia l' Accademia per il premio conferitogli nel concorso giudicato nello scorso gennaio, e quella del dott. Mario Curzio, che si dichiara lieto di aver meritato l' *accessit* nello stesso concorso. Dà quindi notizia della Ministeriale 4 marzo relativa ai decreti di nomina del socio Spampinato a vice-presidente dell' Accademia per l' anno 1955, e del prof. Catalano a socio ordinario residente della Sezione di Scienze Naturali. Partecipa poscia le lettere della Segreteria Generale, riguardanti lo scambio di pubblicazioni con la Biblioteca dell' Accademia delle Scienze di Leningrado, e l' esistenza di lavori relativi al terremoto di Lisbona dell' anno 1755, leggendo le relative risposte. Infine riferisce sul desiderio espresso dal consocio Picone, perchè vengano inviate in omaggio al prof. Achille Bassi, che dirige attualmente il Dipartimento di Matematica nella Scuola Politecnica di Sao Carlos in Brasile, le pubblicazioni accademiche disponibili. L' Accademia accoglie la proposta, decidendo d' inviare i volumi del Rendiconto dall' anno 1942 in poi.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati l' *Annuario dell' Istituto e Museo di Zoologia dell' Università di Napoli*, vol. VI, 1954, offerto dal socio Salfi, ed il I volume delle *Opere di Macedonio Melloni,* inviato dall' Università di Parma e dalla Società italiana di Fisica. L' Accademia ringrazia i donatori.

Il socio Scherillo, anche a nome dei colleghi Bakunin e Giordani, legge la relazione sulla nota della prof. Silvia Restaino, *Ricerche chimiche su alcuni prodotti del Somma-Vesuvio,* la quale conclude con la proposta di inserzione nel Rendiconto. L' accademia unanime approva.

Il socio Spampinato presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Prolungamento di una ipersuperficie dell' S_7 complesso nel quadro quadripotenziale.*

Il segretario presenta, da parte del consocio Carnera, una nota del dott. Riccardo Barbatelli, *Determinazioni meridiane di ascensioni rette di pianeti e pianetini.* Il presidente incarica la Commissione Carnera, Nobile e Spampinato di riferire su questo lavoro in una prossima adunanza.

Il socio Catalano informa i colleghi che, cadendo prossimamente il cinquantenario della morte di Federico Delpino — il quale oltre ad essere stato per molti anni socio ordinario residente dell' Accademia, fu altresì insigne botanico e creatore della biologia vegetale — egli si propone di rendere un omaggio alla memoria dell' illustre scienziato, riassumendo, in una prossima tornata, la storia della biologia vegetale nell' ultimo cinquantennio. L' Accademia accoglie con vivo interesse tale proposta e ringrazia il consocio Catalano per la preannunziata conferenza, che di comune accordo si stabilisce possa aver luogo nella ventura adunanza di maggio.

Processo verbale dell' adunanza del dì 7 maggio 1955.

Partecipano all' adunanza, presieduta dal presidente Diamare, i soci ordinari Bakunin, Carnera, Catalano, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo, Galli, Imbò, Nobile, Pierantoni, Salfi, Scherillo, Spampinato ed i soci corrispondenti Beretta, Galgano ed Orrù. Segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza del 2 aprile, che è approvato. Indi il presidente propone una inversione dell' ordine del giorno, e dà la parola al socio Catalano, il quale alla presenza di numerosi altri docenti ed assistenti universitari, parla — come aveva preannunziato nella precedente tornata — sopra *La Biologia vegetale del nostro tempo*, ricordando Federico Delpino nel cinquantesimo anniversario della morte. Il presidente ringrazia il consocio Catalano per l' interessante conferenza, la quale investe non solo questioni di biologia botanica, ma altresì problemi di alta filosofia, ed annunzia che essa verrà integralmente inserita nel Rendiconto accademico.

Ripresa, dopo una breve sospensione, la seduta per il proseguimento dell' ordine del giorno, il segretario comunica una lettera del Segretario generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti, che accompagna il Bando di concorso per il premio « Urania », istituito, insieme con altri premi intitolati a « Le nove Muse », dal Comune di Napoli e destinato, per l' anno 1955, alle scienze chimiche e alle scienze biologiche (due premi indivisibili di lire 2.000.000 ciascuno). Letti il bando di concorso ed il relativo regolamento, e constatato che si richiede una designazione del Sodalizio, il presidente dà la parola al consocio Salfi, il quale con motivata relazione propone che il premio Urania 1955 per le Scienze biologiche, venga attribuito al prof. Umberto Pierantoni. Il socio Pierantoni si allontana, ed il Presidente mette in discussione tale proposta, alla quale aderiscono entusiasticamente tutti i soci presenti; sicchè a voti unanimi l' Accademia la fa propria, riservandosi di trasmetterla alla Presidenza della Società dopo che, nella prossima tornata del 4 giugno, avrà proceduto ad un' analoga designazione per il premio Urania relativo alle scienze chimiche.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, è segnalato il vol. VII (1954) di *Delpinoa*, nuova serie del Bollettino dell' Orto Botanico di Napoli, offerto dal consocio Catalano. Il presidente ringrazia il donatore.

La Commissione Carnera, Nobile e Spampinato riferisce sulla nota del dott. Riccardo Barbatelli, *Determinazioni meridiane di ascensioni rette di pianeti e pianetini*, proponendone l' inserzione nel Rendiconto. L' Accademia unanime approva.

Il socio D' Erasmo presenta, per il Rendiconto, una nota del dott. Vincenzo Minieri, *Il significato paleoclimatico e l' età della « crosta calcarea »*

nell' area del Foglio 175 (Cerignola). Il presidente nomina la Commissione D' Erasmo, De Lorenzo e Scherillo, con l' incarico di riferire nella prossima adunanza.

Il segretario presenta — a nome del socio corrispondente STAMPACCHIA, che scusa l' assenza — una nota dello stesso consocio dal titolo *Osservazioni sull' esistenza e sull' unicità della soluzione dei problemi al contorno misti per equazioni e derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico,* ed un' altra del dott. Emilio GAGLIARDI, dal titolo *Teoremi di unicità per le soluzioni di un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine.* Per quest' ultima viene incaricata di riferire la Commissione composta dai soci Stampacchia, Miranda e Caccioppoli.

Il socio SPAMPINATO presenta una sua nota, *Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa,* e una nota del prof. Angelo FADINI, *Le superficie iperellittiche dell' S_3 triduale e la loro rappresentazione complessa.* Quest' ultima è affidata alla Commissione Spampinato, Miranda e Caccioppoli, che riferirà nella prossima tornata.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 giugno 1955.

Assistono all' adunanza il presidente Diamaré, il segretario D' Erasmo, i soci ordinari residenti Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, Galli, Giordani, Nobile, Pierantoni, Scherillo ed il corrispondente Colucci.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 7 maggio, che è approvato. Indi presenta la memoria del consocio DAINELLI, *Termini stratigrafici locali della regione Etiopica,* di cui è stata recentemente ultimata la stampa nel volume in corso degli Atti.

Comunica poi l' invito della Société Royale d' Entomologie de Belgique a partecipare alla celebrazione del Centenario della fondazione, che ha avuto luogo a Bruxelles nell' ultima decade di maggio, e legge la lettera di cordiale adesione inviata.

Dà successivamente notizia della richiesta di cambio delle pubblicazioni accademiche pervenuta dall' Agra University, India, che ha inviato il suo *Journal of research.* L' Accademia stabilisce l' invio del proprio Rendiconto a cominciare dall' 1953.

Il socio Giordani legge la relazione motivata, relativa al premio « Urania » del 1955, per le scienze Chimiche, la quale conclude con la proposta che esso venga attribuito al prof. Giulio Natta, ordinario di Chimica industriale nel Politecnico di Milano. Il presidente mette in discussione tale proposta, che l' Accademia accoglie a voti unanimi. Anche questa designazione verrà perciò trasmessa — insieme con quella relativa al premio per le scienze biologiche, già approvata nella precedente adunanza — al Consiglio Generale della Società Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti per la definitiva approvazione.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati:

1°) un cospicuo gruppo di note e memorie, dovute all' attività antica e recente del presidente DIAMARE, il quale discorre particolarmente di due suoi lavori recentissimi, *Il pancreas endocrino* e *Rilievi e riflessioni sulla istofisiologia della secrezione lattea*;

2°) il magnifico volume *Napoli*, dovuto ai proff. Canino e Filangieri, ed offerto dal Banco di Napoli;

3°) la nota D' Erasmo, Lazzari, Minieri e Moncharmont Zei, *Relazione preliminare sul rilevamento del foglio 175, Cerignola (Quadrante II, Lavello, ed aree adiacenti)*.

Il socio D' Erasmo, tanto in nome proprio che dei colleghi De Lorenzo e Scherillo, riferisce sulla nota del dott. Vincenzo MINIERI, *Il significato paleoclimatico e l' età della « crosta calcarea » nell'area del foglio 175 (Cerignola)*, proponendone la stampa nel Rendiconto. L' Accademia unanime approva.

Di uguale avviso è la Commissione Miranda, Caccioppoli e Stampacchia nei riguardi della nota del dott. Emilio GAGLIARDO dal titolo *Teoremi di unicità per le soluzioni di un' equazione differenziale ordinaria del primo ordine*. L' Accademia approva all' unanimità.

Analogamente viene accolta l' inserzione nel Rendiconto della nota del prof. Angelo FADINI, *Le superficie iperellittiche dell' S_3 triduale e la loro rappresentazione complessa*, su parere della Commissione Spampinato, Miranda e Caccioppoli.

Il socio Galli presenta, per il Rendiconto, una nota del prof. Vincenzo FRANCIOSI dal titolo *Premesse all' introduzione del calcolo a rottura nella pratica tecnica* e una nota del dott. Eugenio BRUZZESE sopra *L' instabilità dell' equilibrio Nielsen al di là del limite di proporzionalità*. Si dà incarico di riferire su questi due lavori alla Commissione Galli, Miranda e Tolotti.

Il socio D' Erasmo presenta una nota del dott. Giovanni DE BIASE *Sopra un avanzo fossile di Ippopotamo rinvenuto nella Valle di Venosa*, e una nota del prof. Antonio LAZZARI, *Sopra un frammento di mandibola umana rinvenuto nella Grotta Romanelli (Lecce)*. Il presidente nomina la Commissione D' Erasmo, De Lorenzo e Scherillo, con l'incarico ai riferire su questi lavori nella successiva tornata.

Il socio Scherillo presenta una sua nota dal titolo: *Studi sui tufi flegrei. Nota II: Tufo giallo, mappamonte, pozzolana*, e una del dott. Renato SINNO: *Studio geologico e petrografico del tratto Bagnoli - Monte Olibano - Pozzuoli*. Viene incaricata di riferire su questa nota la Commissione Scherillo, De Lorenzo e D' Erasmo.

Si autorizza il segretario ad accettare, con le norme in vigore, du-

rante il periodo delle ferie estive le eventuali note dei soci di qualsiasi categoria per la inserzione nel Rendiconto.

Il presente verbale viene redatto, letto ed approvato seduta stante.

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 novembre 1955.

Presiede il presidente Diamare, segretario il socio D' Erasmo. Assistono i soci ordinari Bakunin, Catalano, Colamonico, De Lorenzo, Imbò, Malquori, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato ed i corrispondenti Franchetta, Galgano, Montalenti ed Orrù.

Il segretario comunica:

1) i ringraziamenti del consocio Malquori per le condoglianze espressegli dall' Accademia nella circostanza del grave lutto familiare che ebbe a colpirlo nello scorso giugno;

2) la richiesta formulata nel luglio alla Presidenza del Consiglio dei Ministri, Ufficio del Libro e della Carta, per un nuovo contributo sui fondi destinati alle riviste di elevato valore culturale;

3) l' adesione inviata ai Convegni della Società di Genetica agraria e dell' Unione Zoologica Italiana, tenuti al Terminillo nell' agosto-settembre, e nei quali l' Accademia fu rappresentata dal consocio Salfi;

4) la lettera 18 agosto della Presidenza Generale della Società, relativa ai « Premi Antonio Feltrinelli riservati a cittadini italiani » ed ai « Premi internazionali Antonio Feltrinelli » banditi dall' Accademia Nazionale dei Lincei;

5) il messaggio 13 settembre dell' Accademia di Atene contro le violenze commesse in Costantinopoli e Smirne ad opera di turchi.

L' Accademia prende atto.

Dà quindi notizia che in data 23 agosto è pervenuta alla Segreteria, per l' inserzione nel Rendiconto, la seguente nota del socio Nicolò Spampinato: « *Le falde tridimensionali dell S_5 determinate dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa* ».

Partecipa infine che il 22 ottobre u. s. furono assegnati, nell' aula De Sanctis dell' Università di Napoli, i due premi « Urania » di L. 2.000.000 ciascuno, destinati per l' anno 1955 dal Comune di Napoli rispettivamente alle scienze chimiche e alle scienze biologiche, ed attribuiti ai proff. Giovanni Malquori e Umberto Pierantoni; e si dice sicuro di interpretare l' unanime sentimento dei colleghi rinnovando ai due illustri e cari consoci i rallegramenti più vivi dell' Accademia per la meritata, alta distinzione. I soci Malquori e Pierantoni ringraziano.

Si stabilisce quindi il calendario delle adunanze ordinarie dell' anno 1956, che risulta il seguente: Gennaio 7, Febbraio 4, Marzo 3, Aprile 7, Maggio 5, Giugno (da fissare); Novembre 3, Dicembre 1.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati molteplici lavori dell' Istituto Naz. per le applicazioni del Calcolo, offerti dal consocio Picone, ed una nota del socio D' Erasmo, *Sopra un molare di Teleoceras del giacimento fossilifero di Sahabi in Cirenaica.*

Il presidente ringrazia i donatori.

La Commissione Galli, Miranda e Tolotti riferisce sulla nota del prof. Vincenzo Franciosi, *Premesse all' introduzione del calcolo a rottura nella pratica tecnica,* e su quella del dott. Eugenio Bruzzese, sopra *L' instabilità dell' equilibrio della trave Nielsen al di là del limite di proporzionalità,* proponendo l' accoglimento di entrambe nel Rendiconto. Con votazione unanime l' Accademia approva.

Pure all' unanimità sono accolte le proposte d' inserzione nel Rendiconto, avanzate dalla Commissione De Lorenzo, D' Erasmo e Scherillo, nei riguardi delle tre note seguenti: dott. Giovanni De Biase, *Sopra un avanzo fossile di Ippopotamo rinvenuto nella valle di Venosa;* dott. Antonio Lazzari, *Sopra un frammento di mandibola umana rinvenuto nella grotta Romanelli (Lecce);* dott. Renato Sinno, *Studio geologico e petrografico del tratto Bagnoli - Monte Olibano - Pozzuoli.*

Il socio D' Erasmo presenta, per gli Atti, una memoria sua e della dott. Maria Moncharmonl Zei dal titolo *Il cranio giovanile di Elephas antiquus italicus di Pignataro Interamna, nella valle del Liri,* accompagnata da 5 tavole da riprodursi in zincotipia, e da 17 figure a tratto, da intercalarsi nel testo. Con votazione unanime l' Accademia ne approva la stampa, assumendo a suo carico la spesa delle illustrazioni.

Il socio Malquori presenta, per il Rendiconto, una nota del prof. Riccardo Sersale e della dott. Liliana Calarese, *Sull' habitus cristallino dei solidi che prendono origine nella reazione fra l' allumina e la soluzione di calce,* corredata da varie tavole e figure intercalate. Il presidente incarica la Commissione Malquori, Scherillo e D' Erasmo di riferire su questo lavoro nella pressima tornata.

Il socio Miranda presenta, pure per il Rendiconto, una nota del dott. Carlo Ciliberto, *Sul problema di Darboux per l' equazione* $s = f(x, y, z, p, q)$. Si dà incarico ai soci Miranda, Spampinato e Nobile di riferire su detta nota in altra adunanza.

Il segretario presenta, da parte del socio Carnera, una nota del dott. Elio Fichera, *Determinazione di ascensione retta del pianeta Saturno (anno 1955),* per la stampa nello stesso periodico. Il presidente nomina la Commissione Carnera, Nobile e Imbò che si pronunzierà su tale lavoro nella ventura tornata.

Il socio corrispondente Franchetta presenta una nota del prof. Rodolfo Permutti *Su di una rappresentazione delle* g^1_n *di una retta.* Viene incaricata di riferire su di essa la Commissione Franchetta, Miranda e Spampinato.

Il socio SPAMPINATO presenta, in continuazione di due altri lavori sullo stesso argomento, una sua nota, da inserirsi nel Rendiconto, col titolo *Rappresentazione in S_5 del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali.*

Constatata la validità dell' adunanza, a norma dell' art. 11 dello Statuto sociale, per la votazione a cariche sociali, il presidente invita i soci ordinari a procedere, secondo l' ordine del giorno, alla elezioni del vice-presidente per l' anno 1956.

Il Segretario ricorda gli articoli dello Statuto e del Regolamento relativi a tale votazione e distribuisce le schede agli aventi diritto. La votazione, effettuata a scrutinio segreto, dà il risultato seguente :

Soci ordinari presenti e votanti 13 :

Miranda Carlo, voti 12,
Nobile Vittorio » 1

Con le stesse norme si procede quindi alla votazione alla carica di Segretario per il triennio 1956-1958, la quale dà il risultato appresso indicato:

D' Erasmo Geremia, voti 12,
Imbò Giuseppe, » 1.

Il presidente proclama eletto il socio Carlo Miranda vice-presidente dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche per l' anno 1956, e Segretario della stessa per il triennio 1956-1958 il socio Geremia D'Erasmo, avvertendo che a norma dell' art. 14 dello Statuto entrambe le nomine verranno comunicate al Ministro della Pubblica Istruzione per la prescritta approvazione del Capo dello Stato.

Processo verbale dell' adunanza del dì 5 dicembre 1955.

All' adunanza, presieduta dal presidente Diamare, partecipano i soci ordinari Bakunin, Colamonico, De Lorenzo, D' Erasmo (segr.), Galli, Giordani, Miranda, Nobile, Pierantoni, Scherillo, Spampinato, Tolotti, ed i corrispondenti Beretta, Cennamo, Colucci, Franchetta. Scusano l' assenza i soci Imbò e Milone.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 5 novembre, che è approvato, e comunica le richieste di cambio pervenute dalla Società dei Matematici e Fisici della Serbia, con sede a Belgrado, e dal Seminario di Matematica dell' Università di Bari. L' Accademia accoglie la richiesta, decidendo l' invio del Rendiconto, a cominciare dall' anno 1954.

La Commissione Malquori, Scherillo e D' Erasmo riferisce sulla nota del prof. Riccardo SERSALE ed ella dott. Liliana CALARESE, *Sull' habitus cristallino dei solidi che prendono origine nella reazione fra l' allumina e la soluzione di calce*, proponendone l' inserzione nel Rendiconto, con le imitazioni vigenti.

Il socio Miranda, tanto in nome proprio che dei colleghi Spampinato e Nobile, propone di accogliere nello stesso periodico la nota del dott. Carlo CILIBERTO, *Sul problema di Darboux per l' equazione* $s = f(x, y, z, p, q)$.

Uguale parere esprimono la Commissione Carnera, Nobile e Imbò nei riguardi della nota del dott. Elio FICHERA, *Determinazione di ascensione retta del pianeta Saturno (anno 1955)*, e la Commissione Franchetta, Miranda e Spampinato per la nota del prof. Rodolfo PERMUTTI, *Su di una rappresentazione delle* g^1_n *di una retta.*

Con votazione unanime l' Accademia approva le quattro proposte anzidette.

Il socio Colamonico presenta e offre in omaggio all' Accademia il vol. XI delle « Memorie di geografia economica », discorrendo del lavoro del dott. D. Ruocco, « *I Campi Flegrei. Studio di geografia agraria* » in esso inserito. Il presidente, a nome dei soci, ringrazia.

Il socio Galli presenta, per il Rendiconto, le tre note seguenti : 1) prof. Vincenzo FRANCIOSI, *Il teorema delle trasformazioni lineari dei cavi di precompressione nel calcolo a rottura ;* 2) dott. Eugenio BRUZZESE, *Sul calcolo a rottura di strutture in conglomerato precompresso, per flessione e sforzo assiale coesistenti ;* 3) dott. Pasquale D' ELIA, *Contributo alla determinazione del carico critico della trave a cassone.* Il presidente nomina la Commissione formata dai soci Galli, Miranda e Tolotti, perchè riferisca su questi tre lavori in una prossima adunanza.

I N D I C E

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. Pierantoni

(Autorizzazione del Tribunale di Napoli n. 10186 del dì 14 agosto 1954)

Finito di stampare il 31 gennaio 1956